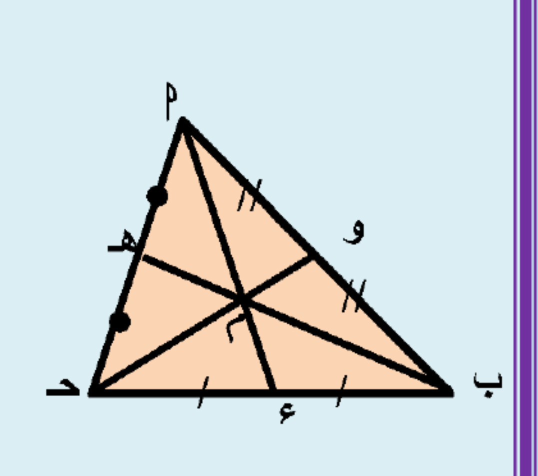
المتميز





= + > <

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثانى الإعدادى
الفصل الدراسى الأول

٢٠١٦ / ٢٠١٧

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى

و وفقنى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

" المتميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين

و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه

تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة

مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات متنوعة و متدرجة

للتدريب على كيفية الحل لتناسب كل المستويات

و مرفق حلولها كاملة في آخر الكتاب

متمنياً أن ينال رضاكم و ثقتكم التى أعتز بها

و الله لا يضيع أجر من أحسن عملا

و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتورى

المحتويات

الوحدة الأولى   الأعداد الحقيقية

مراجعة

تذكر : مجموعات الأعداد :

مجموعة أعداد العد :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

مجموعة الأعداد الطبيعية :

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

مجموعة الأعداد الصحيحة :

ص = { .... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، –١ ، –٢ ، –٣ ، .... }

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة :

ص+ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... } = ع

ص- = { –١ ، –٢ ، –٣ ، .... }

ص = ص+ ∪ { ٠ } ∪ ص-

مجموعة الأعداد النسبية :

ن = { أ/ب : أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ }

لاحظ : ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ن

و شكل فن المقابل يوضح ذلك

ن
ص
ط
أحمد الشتوى

القيمة المطلقة للعدد النسبى :

القيمة المطلقة للعدد الصحيح أ هى :

المسافة بين موقع العدد (أ) و موقع الصفر على خط الأعداد

و هى دائماً موجبة ، و يرمز لها بالرمز | أ |

فمثلاً :

| –٥ | = ٥ ، | ٥ | = ٥ ،

| صفر | = صفر ، | – ٥/٩ | = ٥/٩

ملاحظة :

إذا كان : | س | = ٥ فإن : س = ± ٥

الصورة القياسية للعدد النسبى :

يكون العدد النسبى فى صورته القياسية إذا كان على الصورة :

أ × ١٠^ن حيث : ١ ≤ | أ | < ١٠ ، ن ∈ ص

فمثلاً :

الصورة القياسية للعدد : ١٥٢٠..... هى : ١,٥ × ١٠^٧

، الصورة القياسية للعدد : – ٠,٠٠٠٠٤٦ هى : – ٤,٦ × ١٠^-٦

العدد النسبى المربع الكامل :

هو العدد الذى يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبى

أى : (عدد نسبى)^٢

فمثلاً :

العدد : ٢٥ هو عدد نسبى مربع كامل لأنه يمكن كتابته على الصورة : $(٣)^{٢}$ أو $(-٣)^{٢}$

و من أمثلة الأعداد النسبية المربعة الكاملة :

١ ، ٤ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، $\frac{٢٥}{٣٦}$ ، ٠,٤٦ ، ١,٤٤ ، ....

العدد النسبى المكعب الكامل :

هو العدد الذى يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبى

أى : $(\text{عدد نسبى})^{٣}$

فمثلاً :

العدد : ٢٧ هو عدد نسبى مكعب كامل لأنه يمكن كتابته على الصورة : $(٣)^{٣}$ ،

العدد : – ٢٧ هو عدد نسبى مكعب كامل لأنه يمكن كتابته على الصورة : $(-٣)^{٣}$ ،

و من أمثلة الأعداد النسبية المكعبة الكاملة :

١ ، – ٨ ، $\frac{٢٧}{١٢٥}$ ، – ٠,٠٦٤ ، ....

لاحظ الجدول التالى :

العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
مربعه	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠
مكعبه	١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	٢١٣	٣٤٣	٥١٢	٧٢٩	١٠٠٠

الجذر التربيعى للعدد النسبى :

الجذر التربيعى للعدد النسبى الموجب ﻡ هو العدد الذى مربعه يساوى ﻡ

و يكون : كل عدد نسبى مربع كامل ﻡ له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعى للآخر أى أن مجموعهما صفر

هما : $\sqrt{\text{ﻡ}}$ ، $-\sqrt{\text{ﻡ}}$

فمثلاً :

العدد : ٢٥ له جذران تربيعيان هما : ٥ ، – ٥

لأن : $(٥)^{٢} = ٢٥$ ، $(-٥)^{٢} = ٢٥$

ملاحظات :

١) $\sqrt{١٦}$ يعنى الجذر التربيعى الموجب للعدد : ١٦ ، و هو : ٤

٢) $\sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$

٣) العدد النسبى السالب ليس له جذر تربيعى

فمثلاً : (– ٣) ليس له جذر تربيعى بمعنى أن : $\sqrt{-٤} \notin \text{ن}$

٤) $\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}|$

فمثلاً : $\sqrt{٣^{٢}} = |٣| = ٣$ ، $\sqrt{(-\frac{٢}{٥})^{٢}} = |-\frac{٢}{٥}| = \frac{٢}{٥}$

٥) المعادلة التربيعية : $\text{س}^{٢} = \text{ﻡ}^{٢}$ لها حلان هما { ﻡ ، – ﻡ }

فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٢} = ٩$ هى : { ٣ ، – ٣ }

٦) لإيجاد الجذر التربيعى لأى عدد يمكن تحليله إلى عوامله الأولية ، كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة

الدرس الأول : الجذر التكعيبى للعدد النسبى

نعلم أن :

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه = (طول الحرف)^{٣}

فمثلاً :

حجم المكعب الذى طول حرفه ٣ سم

= ٣ × ٣ × ٣ = ٣ سم^{٣}

تعلم :

أما إذا كان : حجم مكعب ٦٤ سم^{٣} فإن : إيجاد طول حرفه

نبحث عن عدد إذا ضرب فى نفسه ثلاث مرات (أو عدد مكعبه)

نحصل على ٦٤

سنجد أنه : ٤ لأن : ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

و بالتالى يكون : طول حرف المكعب الذى حجمه ٦٤ سم^{٣}

هو : ٤ سم

يسمى العد : ٤ الجذر التكعيبى للعدد ٦٤

الجذر التكعيبى لعدد نسبى :

الجذر التكعيبى للعدد النسبى ﻫ هو العدد الذى مكعبه يساوى ﻫ

، يرمز للجذر التكعيبى للعدد النسبى ﻫ بالرمز : $\sqrt[٣]{ﻫ}$

ملاحظات :

١) الجذر التكعيبى لعدد نسبى موجب يكون موجباً

فمثلاً : $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥

٢) الجذر التكعيبى لعدد نسبى سالب يكون سالباً

فمثلاً : $\sqrt[٣]{-٦٤}$ = – ٤

٣) $\sqrt[٣]{صفر}$ = صفر

٤) $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = س

ايجاد الجذر التكعيبى للعدد النسبى المكعب الكامل :

لإيجاد الجذر التكعيبى لأى عدد نسبى يمكن تحليله إلى عوامله الأولية

، كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة

فمثلاً :

$\sqrt[٣]{١٠٠٠}$ = ٢ × ٥ = ١٠

١٠٠٠	٢	
٥٠٠	٢	٢
٢٥٠	٢	
١٢٥	٥	
٢٥	٥	٥
٥	٥	
١		

ملاحظات :

١) العدد النسبى المكعب الكامل :

هو العدد الذى يمكن كتابته على صورة مكعب

عدد نسبى أى : (عدد نسبى)^{٣}

٢) العدد النسبى المكعب الكامل له جذر تكعيبى واحد

و هو عدد نسبى أيضاً

٣) إذا كان : ﻫ عدداً مكعباً كاملاً فإن : المعادلة التكعيبية : س^{٣} = ﻫ^{٣}

لها حل واحد فقط فى ن هو : ﻫ

فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : س^{٣} = ٨ فى ن هى :

{ $\sqrt[٣]{٨}$ } أى : { ٢ }

(١) أكمل الجدول التالى :

العدد أ	٢٧	-٨			٤
$\sqrt[3]{أ}$			-٥	٦	

العدد أ	$-\frac{١}{٦٤}$		$-٣\frac{٣}{٨}$	$-٠,١٢٥$	
$\sqrt[3]{أ}$		٠,١			$-\frac{٦}{٧}$

(٢) أكمل ما يلى :

[١] $\sqrt[3]{-٢٧} = ...$

[٢] $\sqrt[3]{....} = ٤$

[٣] $|\sqrt[3]{-١٢٥}| = ...$

[٤] $\sqrt{١٦} = \sqrt[3]{....}$

[٥] $\sqrt[3]{٨} = \sqrt{....}$

[٦] $\sqrt[3]{٨} + \sqrt[3]{-٨} = ...$

[٧] $\sqrt{٩} - \sqrt[3]{-٨} = ...$

[٨] $\sqrt{٦٤} - \sqrt[3]{٦٤} = ...$

[٩] $\sqrt[3]{٦٤ + ...} = ٥$

(٣) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt[3]{(-٨)^{٢}} = ...$

(٤ ، -٤ ، ٢ ، -٢)

[٢] $\sqrt[3]{(-\frac{١}{٨})^{٢}} = ...$

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$)

[٣] $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} + \sqrt{٠,٢٥} = ...$

($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، -٢)

[٤] $\sqrt[3]{١٠٠٠} \times \sqrt[3]{٠,٠٠٨} = ...$

($\frac{١}{٢}$ ، ١٠ ، ٢ ، -٢)

[٥] $\sqrt[3]{س^{٦}} = ...$

($س^{٤}$ ، $س^{٣}$ ، $س^{٢}$ ، س)

[٦] إذا كان : $س^{٣} = ٦٤$ فإن : $\sqrt{س} = ...$

(٤ ، -٤ ، ٢ ، -٢)

[٧] طول حرف المكعب الذى حجمه ٢١٦ سم^{٣} يساوى .... سم

(٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨)

[٨] المساحة الجانبية لمكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣} تساوى .... سم^{٢}

(١٢٥ ، ١٠٠ ، ٢٥ ، ٢٠)

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلات التالية فى ح :

[١]	[٢]
$\frac{١}{٣}$ س^{٣} = $\frac{٢٧}{٢٤}$	س^{٣} − ٧ = ٢٠
[٣]	**[٤]**
٨ س^{٣} + ٧ = ٨	(س − ٢)^{٣} = ٦٤
[٥]	**[٦]**
(س − ١)^{٣} = ٨	(٥ س − ٢)^{٣} + ٣ = ٣٠

(٥) كرة حجمها $\frac{٣٢}{٨١}$ π وحدة مكعبة أوجد طول قطرها

(حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣})

(٦) إذا كان نصف مكعب يساوى ٢٥٦ فما هو العدد ؟

الدرس الثانى : مجموعة الأعداد غير النسبية (ن')

نعلم أن :

العدد النسبى : هو العدد الذى يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث : أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ .

فمثلاً :

عند حل المعادلة : ٤ س^{٢} = ٩ فإن : س = ± $\frac{٣}{٢}$

و يلاحظ أن : كلاً من $\frac{٣}{٢}$ ، − $\frac{٣}{٢}$ عدد نسبى

و لكن توجد كثير من الأعداد التى لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث : أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ .

فمثلاً :

عند حل المعادلة : س^{٢} = ٢

فإنه لا يوجد عدد نسبى مربعه يساوى ٢ يكون حلاً للمعادلة

العدد النسبى :

هو العدد الذى لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث : أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ .

من أمثلة الأعداد غير النسبية :

١) الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، − $\sqrt{٦}$ ، ....

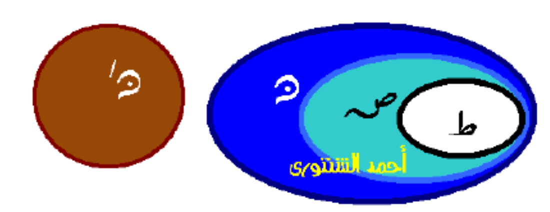
٢) الجذور التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

مثل : $\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{-٤}$ ، $\sqrt[٣]{١٠}$ ، ....

٣) النسبة التقريبية π

حيث أنه لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأى من هذه الأعداد

مثل هذه الأعداد و غيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز (ن')



ملاحظات :

١) ن ، ن' منفصلتان أى أن : ن ∩ ن' = ∅

٢) مجموعة حل المعادلة فى ن' : س^{٢} = ٢

هى { $\sqrt{٢}$ ، − $\sqrt{٢}$ }

(أ) أكمل باستخدام أحد الرمزين ن أو ن' :

[١] ٩ ∈ ....   [٢] $\sqrt{٩}$ ∈ ....

[٣] ٣ ∈ ....   [٤] $\sqrt{٣}$ ∈ ....

[٥] π ∈ ....   [٦] صفر ∈ ....

[٧] $\sqrt[٣]{-٩}$ ∈ ....   [٨] $\sqrt[٣]{٨}$ ∈ ....

(٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العدد غير النسبى من بين الأعداد التالية هو ....

($\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، ٢)

[٢] العدد النسبى من بين الأعداد التالية هو ....

($\sqrt[٣]{-٩}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٩}$)

[٣] المربع الذى مساحته ١٠ سم^{٢} يكون طول ضلعه .... سم

(٥ ، -٥ ، $\sqrt{١٠}$ ، $-\sqrt{١٠}$)

[٤] المكعب الذى حجمه ٤ سم^{٣} يكون طول حرفه .... سم

($\sqrt[٣]{-٤}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$ ، ٥ ، -٥)

(٣) أوجد قيمة س فى كل من مما يلى و بين ما إذا كانت
س $\in$ ن أم س $\in$ ن$'$:

[١] ٥ س^{٢} = ٢٠

[٢] ٢ س^{٣} = ٦

[٣] ٣ س^{٢} = ٢٤

[٤] (س − ٢)^{٣} = ١

[٥] (س − ١)^{٢} = ٤

(٤) أوجد طول ضلع المربع الذى مساحته ٦ سم^{٢}

(٥) بسبب الريح كسر الجزء العلوى من شجرة طولها ٣ أمتار فصنع مع سطح الأرض زاوية ما ، فإذا كان طول الجزء الثابت فوق الأرض من الشجرة متر واحد أوجد المسافة بين قاعدة الشجرة و نقطة تلاقى قمتها مع الأرض

الدرس الثالث : إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

تمهيد :

١) الأعداد : ١ ، ٤ ، ٩ ، .... كل منها مربع كامل

و بأخذ الجذر التربيعى لها تكون : ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

و نلاحظ أن : ٢ يقع بين ١ ، ٤ و بالتالى يكون :

$\sqrt{٢}$ يقع بين ١ ، ٢ أى أن : $\sqrt{٢}$ = ١ + كسر عشرى

، $\sqrt{٥}$ يقع بين ٢ ، ٣ أى أن : $\sqrt{٥}$ = ٢ + كسر عشرى

، .... و هكذا

٢) الأعداد : ١ ، ٨ ، ٢٧ ، .... كل منها مكعب كامل

و بأخذ الجذر التكعيبى لها تكون : ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

و نلاحظ أن : ٣ يقع بين ١ ، ٨ و بالتالى يكون :

$\sqrt[٣]{٣}$ يقع بين ١ ، ٢ أى أن : $\sqrt[٣]{٣}$ = ١ + كسر عشرى

، $\sqrt[٣]{١٠}$ يقع بين ٢ ، ٣ أى أن : $\sqrt[٣]{١٠}$ = ١ + كسر عشرى

، .... و هكذا

(أ) أكمل ما يلى بعددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد :

[١] $\sqrt{١٢}$ العددين هما : .... ، ....

[٢] $\sqrt{٢٩}$ العددين هما : .... ، ....

[٣] $\sqrt[٣]{-٩}$ العددين هما : .... ، ....

[٤] $\sqrt[٣]{١٠٠}$ العددين هما : .... ، ....

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى :

تستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

فمثلاً : نجد : $\sqrt{٢}$ = ١,٤١٤٢.... ، .... و هكذا

و يمكن إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى دون استخدام الآلة الحاسبة

فمثلاً : يمكن إيجاد تقريبية للعدد : $\sqrt{٢}$ كما يلى :

نلاحظ أن : ٢ ينحصر بين العددين ١ ، ٤ (كل منهما مربع كامل)

أى أن : $١ < ٢ < ٤$ بأخذ الجذر التربيعى للأطراف

∴ $١ < \sqrt{٢} < ٢$ أى أن : $\sqrt{٢}$ = ١ + كسر عشرى

و بفحص قيم الأعداد : $(١,١)^٢$ ، $(١,٢)^٢$ ، $(١,٣)^٢$ ، $(١,٤)^٢$

، $(١,٥)^٢$ نجد : $(١,١)^٢ = ١,٢١$ ،

$(١,٢)^٢ = ١,٤٤$ ، $(١,٣)^٢ = ١,٦٩$ ،

$(١,٤)^٢ = ١,٩٦$ ، $(١,٥)^٢ = ٢,٢٥$

، ∵ $١,٩٦ < ٢ < ٢,٢٥$ و بأخذ الجذر التربيعى

∴ $١,٤ < \sqrt{٢} < ١,٥$ ∴ $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

∴ $\sqrt{٢} = ١,٤$ لأقرب جزء من عشرة

و لإيجاد قيمة تقريبية أدق لرقمين عشريين نلاحظ أن :

$\sqrt{٢}$ = ١,٤ + كسر عشرى ، و نجد :

$(١,٤١)^٢ = ١,٩٨٨١$ ، $(١,٤٢)^٢ = ٢,٠١٦٤$

∴ $١,٤١ < \sqrt{٢} < ١,٤٢$ ∴ $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤١ ، ١,٤٢

∴ $\sqrt{٢} = ١,٤١$ لأقرب جزء من مائة ، ..... و هكذا

و يمكن استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الإجابة

(٢) [١] أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{٥}$

[٢] أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{١١}$

[٣] أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[٣]{٢}$

(٣) أوجد قيمة س فى كل مما يلى حيث س $\in$ ص+ :

[١] س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ ، س = ...

[٢] س < $\sqrt{٢٦}$ < س + ١ ، س = ...

[٣] س < $\sqrt{٨٠}$ < س + ١ ، س = ...

[٤] س < $\sqrt[٣]{٥}$ < س + ١ ، س = ...

[٥] س < $\sqrt[٣]{٣٠}$ < س + ١ ، س = ...

[٦] س < $\sqrt[٣]{١٠٠}$ < س + ١ ، س = ...

(٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

($\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ٢,٥)

[٢] العدد غير النسبى المحصور بين – ٢ ، – ١ هو ....

(– $\sqrt{٣}$ ، – ١,٥ ، – ٣ ، $\sqrt{٢}$)

[٣] $\sqrt{١٠}$ = ...

(– ٣,٢ ، ٢,٩٩ ، ٣ ، ٣,١٧)

[٤] أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt[٣]{٢٥}$ هو ....

(٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢)

ملاحظات :

١) $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = \sqrt{س^{٢}} = س$ حيث : $س > ٠$.

فمثلاً : $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٤} = ٢$ ، $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

، $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$ ، .... و هكذا

٢) $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{س} = \sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

فمثلاً : $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

، $\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} = ٥$ ، ..... و هكذا

٣) كل عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين

فمثلاً : لأثبات أن :

[١] $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ نتبع ما يلى :

$\because (\sqrt{٣})^{٢} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

، $(١,٧)^{٢} = ٢,٨٩$ ، $(١,٨)^{٢} = ٣,٢٤$

، $\because ٢,٨٩ < ٣ < ٣,٢٤$ و بأخذ الجذر التربيعى

$\therefore ١,٧ < \sqrt{٣} < ١,٨$

أى أن : $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

[٢] $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥ نتبع ما يلى :

$\because (\sqrt[٣]{١٥})^{٣} = \sqrt[٣]{١٥} \times \sqrt[٣]{١٥} \times \sqrt[٣]{١٥} = ١٥$

، $(٢,٤)^{٣} = ١٣,٨٢٤$ ، $(٢,٥)^{٢} = ١٥,٦٢٥$

، $\because ١٣,٨٢٤ < ١٥ < ١٥,٦٢٥$ و بأخذ الجذر التكعيبى

$\therefore ٢,٤ < \sqrt[٣]{١٥} < ٢,٥$

أى أن : $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

(٥) أثبت أن :

[١] $\sqrt{٥}$ ينحصر بين ٢,٢٣ ، ٢,٢٤

[٢] $\sqrt[٣]{١١}$ ينحصر بين ٢,٢٢ ، ٢,٢٣

تمثيل العدد غير النسبى على الصورة ($\sqrt{س}$) على خط الأعداد :

توجد عدة طرق لتمثيل العدد غير النسبى على الصورة $\sqrt{س}$ منها الطريقة التالية :

تعتمد هذه الطريقة على رسم مثلث قائم الزاوية بحيث يكون $\sqrt{س}$ طول أحد ضلعى القائمة و يكون : طول الوتر = $\frac{1}{2}$ (س + ١)

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{1}{2}$ (س − ١)

فمثلاً : لتمثيل العدد $\sqrt{5}$

١) نوجد : طول الوتر = $\frac{1}{2}$ (٥ + ١) = ٣

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{1}{2}$ (٥ − ١) = ٢

٢) نرسم خط الأعداد ،
و من نقطة (و) نقيم عمود طوله ٢ وحدة طول يصل لنقطة ﺃ

٣) نركز بسن الفرجار عند نقطة ﺃ و بفتحة طولها ٣ وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد س على يمين نقطة (و) فيكون :

(و س)^2 = (ﺃ س)^2 − (ﺃ و)^2 = (٣)^2 − (٢)^2 = ٥

∴ و س = $\sqrt{5}$ وحدة طول

و تكون نقطة س هى التى تمثل العدد $\sqrt{5}$

يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد نقطة س/ التى تمثل العدد − $\sqrt{5}$ حيث س/ تقع على يسار النقطة و

ملاحظات :

(١) كل عدد غير نسبى يمكن تمثيله بنقطة على خط الأعداد

(٢) لتمثيل العدد : ١ + $\sqrt{5}$ نتبع نفس الخطوات السابقة ، لكن نركز سن الفرجار فى النقطة التى تمثل العدد ١ ، .... و هكذا

(٦) [١] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{3}$

[٢] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التى تمثل العدد − $\sqrt{7}$

[٣] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التى تمثل العدد ١ − $\sqrt{٦}$

[٤] ارسم خط الأعداد و حدد النقطة التى تمثل العدد ١ + $\sqrt{٥}$

(٧) ارسم Δ ﺃ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، و الذى فيه ﺃ ب = ٢ سم ، ب حـ = ٣ سم و استخدم الشكل فى تحديد النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{١٣}$ على خط الأعداد

(٨) أوجد كلاً من طول ضلع و طول قطر مربع مساحته ١٠ سم^{٢}

(٩) دائرة محيطها ٢ $\sqrt{٥}$ π سم أوجد مساحة سطحها

أحمد الشتورى

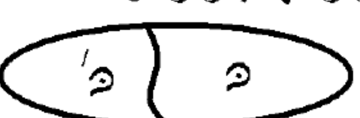
الدرس الرابع : مجموعة الأعداد الحقيقية ح

مجموعة الأعداد الحقيقية :

هى المجموعة الناتجة من إتحاد مجموعة الأعداد النسبية و مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز ح

أى أن : ح = ن ∪ ن′

كما بالشكل المقابل



و شكل فن المقابل يوضح :

١) ن ∩ ن′ = ∅

٢) أى عدد طبيعى أو صحيح أو نسبى أو غير نسبى هو عدد حقيقى أى أن :

ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح ، ن′ ⊂ ح

ح
مجموعة الأعداد النسبية ن
مجموعة الأعداد الصحيحة ص
مجموعة الأعداد الطبيعية ط
مجموعة الأعداد غير النسبية ن′

٣) كل عدد حقيقى تمثله نقطة واحدة على خط الأعداد

$ح_{-}$ ، $ح_{+}$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ، ٠ و ، مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

و يلاحظ :

[١] العدد صفر تمثله نقطة الأصل و

[٢] الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقط خط الأعداد على يمين و

[٣] الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقط خط الأعداد على يمين و

[٤] ح = $ح_{+}$ ∪ {٠} ∪ $ح_{-}$

[٥] $ح_{+}$ = {س : س ∈ ح ، س > ٠}

[٦] $ح_{-}$ = {س : س ∈ ح ، س < ٠}

[٧] مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = $ح_{-}$ ∪ {٠}
= {س : س ∈ ح ، س ≤ ٠}

[٨] مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = $ح_{+}$ ∪ {٠}
= {س : س ∈ ح ، س ≥ ٠}

[٩] $\sqrt[3]{-1} = -1$ لأن : $(-1)\times(-1)\times(-1) = -1$

بينما $\sqrt{-1}$ ∉ ح لأنه لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب فى نفسه كان الناتج ‎-١

[٩] يرمز للأعداد الحقيقية بدون الصفر بالرمز $ح^{*}$

أى أن : $ح^{*}$ = ح − {٠}

أحمد الشتوى

(١) أكمل ما يلى :

[١] ن ∪ ن′ = ...

[٢] ن ∩ ن′ = ...

[٣] $ح_{+}$ ∪ $ح_{-}$ = ...

[٤] $ح_{+}$ ∩ $ح_{-}$ = ...

[٥] ح − ن = ...

[٦] ح − ن′ = ...

(٢) أكمل الجدول التالى بوضع علامة (✓) فى المكان المناسب كما فى الحالة الأولى :

العدد	عدد طبيعي	عدد صحيح	عدد نسبي	عدد غير نسبي	عدد حقيقي
٥	✓	✓	✓	×	✓
$-\frac{١}{٢}$					
$\sqrt{٢}$					
$\lvert -٧ \rvert$					
$\sqrt[٣]{٤}$					
١,٣					
$-\sqrt{٣}$					
$\sqrt{-٩}$					
$\sqrt[٣]{-٨}$					

(٣) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] ح = ...

(ن ∪ ن' ، ح+ ∪ ح- ، ص+ ∪ ص- ، ط ∪ ح-)

[٢] $\{$ س : س $\in$ ح ، س $<$ ٠ $\}$ = ...

(ح ، ح+ ، ح- ، ح*)

[٣] إذا كان : س عدداً حقيقياً سالباً فالعدد الذى يمثل عدداً موجباً من الأعداد التالية ....

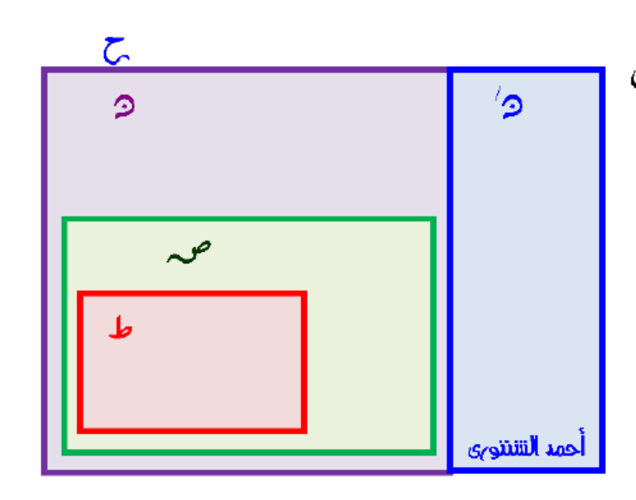
(س^{٣} ، س^{٢} ، ٢ س ، $\frac{١}{٢}$ س)

[٤] إذا كان : $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{أ}{\sqrt{٥}}$ عددين حقيقيين بين صفر ، ١ فإن : أ = ...

(-٢ ، ١ ، $\sqrt{٥}$ ، ٢)

(٤) ضع الأعداد التالية فى أماكنها المناسبة فى شكل فن المقابل

-٢ ، $\sqrt{٢}$ ، π ، ٢,٥ ، $-٢\frac{٣}{٤}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، $\sqrt[٣]{١٤}$ ، ٣ ، صفر



الدرس الخامس : علاقة الترتيب فى ح

إذا كانت : ﻡ ، ب نقطتان تنتميان للمستقيم ل
فإنه وفق إتجاه السهم بالشكل ا لمقابل يكون :
ب تلى ﻡ أى تكون على يمينها ،
ﻡ تسبق ب أى تكون على يسارها
و هكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم ، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عدداً حقيقياً فإننا نقول أن :
مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة مرتبة

خواص الترتيب :

١] إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خط الأعداد النقطتان ﻡ ، ب على الترتيب فإن :

١) ﻡ تنطبق على ب	٢) ﻡ تسبق ب	٣) ﻡ تلى ب
س = ص ، ﻡ ≡ ب	ﻡ (س) ، ب (ص)	ب (ص) ، ﻡ (س)
∴ س = ص	∴ س < ص	∴ س > ص

٢] إذا كان : س عدداً حقيقياً تمثله على خط الأعداد النقطة ﻡ ، و هى نقطة الأصل التى تمثل العدد صفر فإن :

١) ﻡ تنطبق على و	٢) ﻡ تقع على يمين و	٣) ﻡ تقع على يسار و
س = ٠ ، ﻡ ≡ و	و (٠) ، ﻡ (س)	ﻡ (س) ، و (٠)
∴ س = ٠	∴ س > ٠ و يكون س عدداً حقيقياً موجباً	∴ س < ٠ و يكون س عدداً حقيقياً سالباً

فمثلاً :

لترتيب الأعداد : $\sqrt[3]{-8}$ ، $\sqrt{11}$ ، ٣ ، $\sqrt{7}$ تصاعدياً

نتبع ما يلى :

$\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt{4}$ ، $3 = \sqrt{9}$

و يكون الترتيب التصاعدى من الأصغر إلى الأكبر هو :

$-\sqrt{4}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{11}$

أى :

$\sqrt[3]{-8}$ ، $\sqrt{7}$ ، ٣ ، $\sqrt{11}$

(١) رتب الأعداد تصاعدياً :

$\sqrt[3]{-١}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ٦ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $-\sqrt{٤٥}$

(٢) رتب الأعداد تنازلياً :

$\sqrt[3]{-٢٧}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $-\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $-\sqrt{١١}$

(٣) ضع العلامة المناسبة (< ، = ، >) :

[١] $\sqrt{٧}$ .... ٢   [٢] $\sqrt{٤}$ .... $\sqrt[3]{٨}$

[٣] $\sqrt[3]{-٢٤}$ .... -٣ [٤] $١ + \sqrt{٢}$ .... $\sqrt{٥}$

[٥] $\sqrt[3]{-١}$ .... $٣ - \sqrt{٥}$ [٦] $١ - \sqrt{٢}$ .... $\sqrt{٢} - ١$

(٤) إذا كانت : س $\in$ ح فاذكر ما إذا كانت س موجبة أم سالبة في كل من الحالات التالية :

[١] $٠ < س$ [٢] $٠ > س$

[٣] $|-٤| < س$ [٤] $٠ > س > -٢$

[٥] $٧ > س > |-٥|$ [٦] $|-٧| > س > |-١|$

(٥) أكتب عدد نسبى و أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين ٥ ، ٧

(٦) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt{٢} < \sqrt[3]{٣}$

الدرس السادس : الفترات

تمهيد :

نعلم أن : يمكن التعبير عن المجموعة :

س = مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من – ١ و الأقل من ٥

بطريقة الصفة المميزة كما يلى :

س = { أ : أ ∈ ص ، – ١ < أ < ٥ }

، بطريقة السرد كما يلى :

س = { – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

، تمثل على خط الأعداد كما بالشكل :

–٥ –٤ –٣ –٢ –١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

لاحظ أن : عناصر المجموعة س تمثل بنقط منفصلة

أما المجموعة :

ع = مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من – ١ و الأقل من ٥

فيمكن التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة كما يلى :

ع = { أ : أ ∈ ح ، – ١ < أ < ٥ }

و لكن لا يمكن التعبير عنها بطريقة السرد لأنه يوجد بين كل عددين حقيقيين عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية بعضها أعداد نسبية و البعض الآخر أعداد غير نسبية

و بالتالى لا يمكن تمثيلها على خط الأعداد كما سبق

لاحظ أن : عناصر المجموعة ع يجب أن تمثل بنقط متصلة

لذا تستخدم طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة ع تسمى الفترة

الفترة :

هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً : الفترات المحدودة

إذا كان : أ ، ب ∈ ح ، أ < ب فإننا نعرف كلاً من :

١) الفترة المغلقة [أ ، ب]

[أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب }

عناصرها أ ، ب و جميع الأعداد الحقيقية بينهما

أ ب

توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ ، ب و تظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد

و يلاحظ : أ ∈ [أ ، ب] ، ب ∈ [أ ، ب]

٢) الفترة المفتوحة] أ ، ب [

] أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ < س < ب }

عناصرها جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ ، ب

أ ب

توضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ ، ب و تظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد

و يلاحظ : أ ∉ [أ ، ب] ، ب ∉ [أ ، ب]

٣) الفترة نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة)] أ ، ب [

أ) [أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب }

عناصرها العدد أ ، و جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ ، ب

أ ب

توضع دائرة مغلقة عند النقطة الممثلة للعدد أ ، و دائرة مفتوحة عند النقطة الممثلة للعدد ب و تظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد

و يلاحظ : أ ∈ [أ ، ب] ، ب ∉ [أ ، ب]

٢]]أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب }

عناصرها العدد ب ، و جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ ، ب

توضع دائرة مفتوحة عند النقطة الممثلة للعدد أ ، و دائرة مغلقة عند النقطة الممثلة للعدد ب و تظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد

و يلاحظ : أ ∉]أ ، ب] ، ب ∈]أ ، ب]

فمثلاً :

١) الفترة [–٢ ، ٣] تكتب بطريقة الصفة المميزة كما يلي :

[–٢ ، ٣] = { س : س ∈ ح ، –٢ ≤ س ≤ ٣ }

و تمثل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

٢) المجموعة : سَ = { س : س ∈ ح ، ١ < س ≤ ٦ }

تكتب على صورة كما يلي : سَ =]١ ، ٦]

و تمثل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

(١) أكتب الفترات التالية بطريقة الصفة المميزة و مثلها على خط الأعداد :

[١]]–٣ ، ٤]

[٢]]٢ ، ٧[

(٢) أكتب المجموعات التالية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

[١] سَ = { س : س ∈ ح ، –٤ ≤ س ≤ ٤ }

[٢] سَ = { س : س ∈ ح ، –٥ ≤ س < –١ }

(٣) ضع الرمز المناسب ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ :

[١] $\sqrt{2}$ .... [١ ، ٢]

[٢] $\sqrt[3]{3}$ .... [–٢ ، ١]

[٣] ٤ ....]–٤ ، ٤]

[٤] –٥ ....]–٥ ، ٣]

[٥] |–٥| .... [٤ ، ٦]

[٦] {٢ ، ٧} .... [٢ ، ٧]

[٧] {٢ ، ٧} .... [٢ ، ٧[

[٨]]٢ ، ٥] .... [٣ ، ٥]

[٩] [١ ، ٢] .... [–٣ ، ٣]

ثانياً : الفترات غير المحدودة

نعلم أن خط الأعداد مهما أمتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين و أعداد سالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط لذا فإنه :

[١] الرمز ∞ يقرأ (لا نهاية) و يعنى أنه أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره ، ∞ ∉ ح

[٢] الرمز − ∞ يقرأ (سالب لا نهاية) و يعنى أنه أصغر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره ، − ∞ ∉ ح

[٣] الرمزان ∞ ، − ∞ لا توجد نقط تمثلهما على حط الأعداد الحقيقية ، و هما امتداد لخط الأعداد من جهتيه

− ∞ ، ∞

و إذا كان : أ ∈ ح فإننا نعرف كلاً من :

١) [أ ، ∞[= { س : س ∈ ح ، س ≥ أ }

− ∞ ، ∞ ، أ

و هى تعبر عن العدد أ و جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أ
و يلاحظ أن : أ ∈ [أ ، ∞[

٢)]أ ، ∞[= { س : س ∈ ح ، س > أ }

− ∞ ، ∞ ، أ

و هى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أ
و يلاحظ أن : أ ∉]أ ، ∞[

٣)]− ∞ ، أ] = { س : س ∈ ح ، س ≤ أ }

− ∞ ، ∞ ، أ

و هى تعبر عن العدد أ و جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أ
و يلاحظ أن : أ ∈]− ∞ ، أ]

٤)]− ∞ ، أ[= { س : س ∈ ح ، س < أ }

− ∞ ، ∞ ، أ

و هى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أ
و يلاحظ أن : أ ∉]− ∞ ، أ[

ملاحظات :

١) مجموعة الأعداد الحقيقية ح =]− ∞ ، ∞[
٢) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $ح_+$ =]٠ ، ∞[
٣) مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $ح_-$ =]− ∞ ، ٠[
٤) مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = [٠ ، ∞[
٥) مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة =]− ∞ ، ٠]

(٤) أكتب الفترات التالية بطريقة الصفة المميزة و مثلها على خط الأعداد :

[١]]− ∞ ، ٤]

[٢]]٢ ، ∞[

(٥) أكتب المجموعات التالية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

[١] س = { س : س ∈ ح ، س ≥ ٤ }

[٢] س = { س : س ∈ ح ، س < −١ }

(٦) ضع الرمز المناسب ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ :

[١] ٣ ....]−∞ ، ٤]

[٢] ٤ ....]−∞ ، ٤]

[٣] ٤ ....]−∞ ، ٤[

[٤] −٥ ....]−٥ ، ∞[

[٥] |−٥| .... [٥ ، ∞[

[٦] [٠ ، ٣] ....]−∞ ، ٤[

[٧] [−٣ ، ١] .... [٢ ، ∞[

[٨] [١ ، ٢] ....]١ ، ∞[

[٩] [١ ، ٢] ....]−١ ، ∞[

العمليات على الفترات :

تذكر :

العمليات على المجموعات :

١) تقاطع مجموعتين :

هو مجموعة جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين

٢) اتحاد مجموعتين :

هو مجموعة تحوى جميع العناصر الموجودة فى المجموعتين أو كليهما

٣) مجموعة الفرق بين المجموعتين س ، ص :

هى مجموعة العناصر التى تنتمى للمجموعة س و لا تنتمى للمجموعة ص و يرمز لها بالرمز س − ص

٤) مكملة المجموعة س بالنسبة للمجموعة ش :

هى مجموعة العناصر التى تنتمى للمجموعة ش و لا تنتمى للمجموعة س و يرمز لها بالرمز س′

فمثلاً :

إذا كانت : ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

، س = { ٣ ، ٤ ، ٦ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ } فإن :

[١] س ∩ ص = { ٣ }

[٢] س ∪ ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٥ }

[٣] س − ص = { ٤ ، ٦ }

[٤] ص − س = { ٢ ، ٥ }

[٥] س′ = { ١ ، ٢ ، ٥ }

[٦] ص′ = { ١ ، ٤ ، ٦ }

العمليات على الفترات :

حيث أن الفترات هى مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية فإنه يمكن إجراء عمليات التقاطع و الإتحاد و الفرق و المكملة عليها

فمثلاً :

١) إذا كانت : س = [–١ ، ٤] ، ص = [–٣ ، ١] فإن :

س ∩ ص = [–١ ، ١]

س ∪ ص = [–٣ ، ٤]

س – ص =] ١ ، ٤]

ص – س = [–٣ ، –١ [

٢) إذا كانت : س = [–١ ، ∞ [فإن :

س/ =] –∞ ، –١ [

٣) إذا كانت : س = [٢ ، ٥] ، ص = [–٣ ، ١] فإن :

س ∩ ص = ∅

لاحظ أن :

س ، ص متباعدتان

(٧) إذا كانت : س = [–٢ ، ٣] ، ص = [–٤ ، ٠]

أوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

[١] س ∩ ص = ...

[٢] س ∪ ص = ...

[٣] س – ص = ...

[٤] ص – س = ...

(٨) إذا كانت : س =] –∞ ، ٣] ، ص = [–٤ ، ∞ [

أوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

[١] س ∩ ص = ...

[٢] س ∪ ص = ...

[٣] س/ = ...

[٤] ص/ = ...

(٩) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] [٣ ، ٥] − {٣} = ...

( ]٣ ، ٥[،]٣ ، ٥] ، [٣ ، ٥[، [٣ ، ٥])

[٢] [٣ ، ٥] − {٣ ، ٥} == ....

( ]٣ ، ٥[،]٣ ، ٥] ، [٣ ، ٥[، [٣ ، ٥])

[٣] [٣ ، ٥] −]٣ ، ٥[= ....

(∅ ،]٣ ، ٥] ، {٣} ، {٣ ، ٥})

[٤]]−١ ، ١[∪ [١ ، ٤] = ...

(∅ ، [−١ ، ٤] ،]−١ ، ٤] ،]−١ ، ٤[ )

[٥]]−١ ، ١[∩]٢ ، ٤] = ...

(∅ ،]١ ، ٢[،]−١ ، ٤] ،]−١ ، ٢[ )

[٦] [−٤ ، ١] ∩ ح+ = ...

(∅ ،]٠ ، ١] ،]−١ ، ٤] ،]−٤ ، ١[ )

[٧] إذا كانت : س =]٣ ، ∞[فإن : س′ = ...

([٣ ، ∞[،]٣ ، ∞[،]−∞ ، ٣] ،]−∞ ، ٣[ )

[٨] إذا كانت : س ∩ [٢ ، ٧] = [٣ ، ٤[فإن : س = ...

([٣ ، ٤[، [٢ ، ٧] ، [٣ ، ٧] ،]٢ ، ٤])

[٩] مجموع الأعداد الحقيقية فى [−١٠ ، ١٠] هو ....

(−١٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، صفر)

(١٠) أكمل ما يلى :

[١] إذا كانت : س ∈ [١ ، ٩] فإن : √س ∈ ....

[٢] إذا كانت : س ∈ [−٢ ، ٣] فإن : $س^{٢}$ ∈ ....

[٣] إذا كانت : $س^{٢}$ ∈ [٠ ، ٤] فإن : $س^{٣}$ ∈ ....

[٤] إذا كان : س ∈ ح+ ، و كان : س < $س^{٢}$ فإن : س ∈ ....

[٥] إذا كانت : س + ٢ ∈ [١ ، ٤] فإن : ٢ س ∈ ....

(١١) إذا كان : س ∩ ص = [٤ ، ٧] ، س ∪ ص = [٣ ، ٧]
، س ⊂ ص فأوجد : س ، ص ، ص − س

(١٢) إذا كان : س ∩ ص = [٢ ، ٤] ، س ∪ ص = [١ ، ٦]
، س − ص =]٤ ، ٦] فأوجد : س ، ص

الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً : جمع الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

١) ٣ س ، ٤ س حدان جبريان متشابهان

مجموعهما هو حد جبرى مشابه لهما

أى : ٣ س + ٤ س = (٣ + ٤) س = ٧ س

بالمثل يمكن استنتاج أن :

$٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢} = (٣ + ٤)\sqrt{٢} = ٧\sqrt{٢}$

لاحظ أن :

العدد الحقيقى $٣\sqrt{٢}$ ينتج من حاصل ضرب العدد النسبى ٣ فى العدد غير النسبى $\sqrt{٢}$

٢) ٣ س ، ٤ ص حدان جبريان غير متشابهين

مجموعهما هو مقدار جبرى أبسط صورة له هى : ٣ س + ٢ ص

بالمثل : العددين الحقيقيين $٣\sqrt{٢}$ ، $٤\sqrt{٣}$ مجموعهما هو عدد حقيقى أبسط صورة له هى : $٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣}$

(أ) أوجد ناتج :

[١] $٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + \sqrt{٥} =$ ....

[٢] $\sqrt{٣} - \sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٣} =$ ....

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١ الانغلاق :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح يكون : (أ + ب) ∈ ح

أى أن : مجموع أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

و بالتالى : ح مغلقة تحت عملية الجمع

فمثلاً :

ناتج جمع كل من ٣ + ٤ ، $٧ + \sqrt{٢}$ هو عدد حقيقى

[٢ الإبدال :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح فإن : أ + ب = ب + أ

أى أن : عملية الجمع إبدالية فى ح

فمثلاً :

$٧ + \sqrt{٢} = \sqrt{٢} + ٧$

[٣ الدمج :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ∈ ح يكون :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) = أ + ب + حـ

فمثلاً :

$(٣ + \sqrt{٢}) + ٤ = ٣ + (\sqrt{٢} + ٤)$ الدمج

$= ٣ + (٤ + \sqrt{٢})$ الإبدال

$= (٣ + ٤) + \sqrt{٢}$ الدمج

$= ٧ + \sqrt{٢}$

[٤ العنصر المحايد الجمعى :

الصفر هو المحايد الجمعى فى ح لأن : أ + ٠ = ٠ + أ = أ

فمثلاً :

$\sqrt{٣} + ٠ = ٠ + \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

٥] وجود معكوس جمعى لكل عد حقيقى :

لكل أ ∈ ح يوجد (– أ) ∈ ح حيث :

أ + (– أ) = صفر (المحايد الجمعى)

فمثلاً :

المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٣}$ هو : $-\sqrt{٣}$ و العكس صحيح

لأن : $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) = ٠$

ملاحظات :

١) المعكوس الجمعى للعدد : $٣ + \sqrt{٢}$ هو :

$-(٣ + \sqrt{٢}) = -٣ - \sqrt{٢}$

٢) المعكوس الجمعى للعدد : $٣ - \sqrt{٢}$ هو :

$-(٣ - \sqrt{٢}) = -٣ + \sqrt{٢} = \sqrt{٢} - ٣$

٣) المعكوس الجمعى للعدد صفر هو نفسه

ثانياً : طرح الأعداد الحقيقية :

حيث أن لكل عدد حقيقى معكوس جمعى فإن عملية الطرح ممكنة دائماً فى ح و تعرف كما يلى :

لكل أ ، ب ∈ ح يكون : أ – ب = أ + (– ب) أى أن :

عملية الطرح (أ – ب) تعنى جمع أ مع المعكوس الجمعى للعدد ب

و يلاحظ أن :

عملية الطرح فى ح ليست إبدالية و ليست دامجة

(٢) أكمل ما يلى :

[١] $\sqrt{٧} + \sqrt{٧} = ...$

[٢] $\sqrt{٣} + ٤ = ٤ + ...$

[٣] $\sqrt{٥} + (-\sqrt{٥}) = ...$

[٤] $٦ + \sqrt{١١} = ٤ + (.... + \sqrt{١١})$

[٥] $٨\sqrt[٣]{٩} - ٤\sqrt[٣]{٩} = ...$

[٦] $٣\sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢} = ...$

[٧] $\frac{١}{٢}\sqrt{٦} + \sqrt{٦} + \frac{٢}{٣}\sqrt{٦} = ...$

[٨] المعكوس الجمعى للعدد : $\sqrt[٣]{-٨}$ هو ....

[٩] المعكوس الجمعى للعدد : $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

[١٠] المعكوس الجمعى للصفر هو ....

[١١] العدد المحايد الجمعى فى ح هو ....

ثالثاً : ضرب الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

١) ٣ × ٤ س = (٣ × ٤) س = ١٢ س

بالمثل يمكن استنتاج أن :

٣ × ٤ √٢ = (٣ × ٤) √٢ = ١٢ √٢

٢) ٣ س × ٤ س = (٣ × ٤) (س × س) = ١٢ س^٢

بالمثل يمكن استنتاج أن :

٣ √٢ × ٤ √٢ = (٣ × ٤) (√٢ × √٢)

= ١٢ × ٢ = ٢٤

(٣) أوجد ناتج :

[١] ٢ × (– ٥ √٥) = ...

[٢] √٢ × ٥ √٢ = ...

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١] الانغلاق :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح يكون : (أ × ب) ∈ ح

أى أن : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

و بالتالى : ح مغلقة تحت عملية الضرب

فمثلاً :

حاصل ضرب كل من ٣ × ٤ = ١٢ ، ٧ × √٢ = ٧ × √٢

، √٢ × √٣ = √٦ هو عدد حقيقى

[٢] الإبدال :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح فإن : أ × ب = ب × أ

أى أن : عملية الضرب إبدالية فى ح

فمثلاً :

٧ × √٢ = √٢ × ٧ = ٧ √٢

[٣] الدمج :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ∈ ح يكون :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) = أ + ب + حـ

فمثلاً :

√٢ × ٣ × √٢ = √٢ × (٣ × √٢)   الدمج

= √٢ × (√٢ × ٣)   الإبدال

(√٢ × √٢) × ٣   الدمج

= ٢ × ٣ = ٦

[٤] العنصر المحايد الضربى :

الواحد هو المحايد الجمعى فى ح لأن : أ × ١ = ١ × أ = أ

فمثلاً :

√٣ × ١ = ١ × √٣ = √٣

[٥] وجود معكوس ضربى لكل عد حقيقى :

لكل عدد حقيقى أ ≠ صفر يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{أ}$ حيث :

أ × $\frac{١}{أ}$ = ١ (المحايد الضربى)

فمثلاً :

المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو : $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ و العكس صحيح

لأن : $\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} = ١$

ملاحظات :

١) العدد و معكوسه الضربى لهما نفس الإشارة

فمثلاً :

المعكوس الضربى للعدد $-\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ هو : $-\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

٢) المعكوس الضربى للعدد : ١ هو نفسه

، و المعكوس للعدد : -١ هو نفسه

٣) لا يوجد معكوس ضربى للعدد صفر لأن : $\frac{١}{٠}$ ليس لها معنى

٤) $١ = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = ...$

٥) يفضل أن يكون مقام العدد الحقيقى عدداً صحيحاً

فمثلاً :

$\frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$

، $\frac{٦}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{٦}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{٦\sqrt[٣]{٢}}{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

٦] توزيع الضرب على الجمع :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، حـ يكون :

أ × (ب + حـ) = (أ × ب) + (أ × حـ) = أ ب + أ حـ

، (أ + ب) × حـ = (أ × حـ) + (ب × حـ) = أ حـ + ب حـ

فمثلاً :

$٣\sqrt{٥}\,(٤ + \sqrt{٥}) = ٣\sqrt{٥} \times ٤ + ٣\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

$= ٣ \times ٤\sqrt{٥} + ٣ \times ٥ = ١٢\sqrt{٥} + ١٥$

رابعاً : قسمة الأعداد الحقيقية :

حيث أن لكل عدد حقيقى لا يساوى الصفر معكوس ضربى فإن عملية القسمة على أى عدد حقيقى خلاف الصفر ممكنة دائماً فى ح

و تعرف كما يلى :

لكل أ ∈ ح ، ب ∈ ح − { ٠ } يكون : $\frac{أ}{ب} = أ \times \frac{١}{ب}$ (ب ≠ ٠)

أى أن :

عملية القسمة ($\frac{أ}{ب}$) تعنى ضرب أ فى المعكوس الضربى للعدد ب

و يلاحظ أن :

عملية القسمة فى ح ليست إبدالية و ليست دامجة

(٤) أكمل ما يلى :

[١] $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ...$

[٢] $\sqrt{٣} \times ٤ = ٤ + ...$

[٣] $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ... \times \sqrt{٢} = ...$

[٤] $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = ...$

[٥] $٢\sqrt[٣]{٢} \times ٤\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} = ...$

[٦] $\sqrt{٥}\,(\sqrt{٥} + \sqrt{٢}) = ...$

[٧] $\sqrt{٣}\,(٢\sqrt{٣} - ٣) = ...$

[٨] $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) = ...$

[٩] $(\sqrt{٥} + ٢)^{٢} = ...$

[١٠] المعكوس الضربى للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

[١١] العدد المحايد الضربى فى ح هو ....

(٥) إذا كان : س = $\sqrt{٣} + ٢$ ، ص = $\sqrt{٣} - ٢$ أوجد قيمة :

[١] س + ص [٢] س ص [٣] س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢}

(٦) أكمل لتقدير ناتج $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$
و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

تقدير $\sqrt{١٠}$ هو : ..... لأن : $\sqrt{٩}$ = ...

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})$ هو : ٥ + ... = ...

، تقدير $\sqrt[٣]{٧}$ هو .... لأن : $\sqrt[٣]{٨}$ = ...

∴ تقدير $(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : ٣ − .... = ...

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : .... × .... = ...

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو ....

أى أن التقدير ....

(٧) أعط تقديراً لناتج $(٢ + \sqrt{١٥})(٤ - \sqrt[٣]{٢٥})$
و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

(٨) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ...$

(٥ ، ١٠ ، $٢\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{١٠}$)

[٢] $(٢\sqrt{٢})^{٢} = ...$

(٤ ، ٨ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٨}$)

[٣] $(٢\sqrt[٣]{٥})^{٣} = ...$

(٤٠ ، ٢٠ ، $٤\sqrt[٣]{٥}$ ، $٨\sqrt[٣]{٥}$)

[٤] المعكوس الجمعي للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

($٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $-٣\sqrt{٢}$)

[٥] المعكوس الجمعي للعدد $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})$ هو ....

($\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$)

[٦] $\frac{١٥}{٣\sqrt{٥}} = ...$

($١٥\sqrt{١٥}$ ، $٥\sqrt{٥}$ ، $٣\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$)

[٧] $\frac{٦ - \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ...$

($١ - ٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣} - ١$ ، $١ + ٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣} + ١$)

[٨] المعكوس الضربي للعدد $\frac{-٣}{\sqrt{٣}} = ...$

($\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $-٣\sqrt{٣}$)

[٩] $(\sqrt{٥} - ٣)^{٢} = ١٤ - ....$

($٢\sqrt{٥}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $٦\sqrt{٥}$ ، $٩\sqrt{٥}$)

[١٠] إذا كان بعدا مستطيل هما $(١٠ + \sqrt{٢})$ سم ، $(١٠ - \sqrt{٢})$ سم فإن محيطه = ... سم

(٤٠ ، ٢٠ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢}$)

[١١] إذا كان بعدا مستطيل هما $(٦ + \sqrt{٥})$ سم ، $(٦ - \sqrt{٥})$ سم فإن مساحته = ... سم^{٢}

(٤١ ، ٣١ ، ٣٠ ، $٦\sqrt{٥}$)

[١٢] إذا كان : $\sqrt{س} = \sqrt{٢} + ١$ فإن : س = ...

($٢ - ٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢} - ٣$ ، $٢ + ٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢} + ٣$)

[١٣] إذا كان : $س^{٢} = (٢\sqrt{٣} + ٣)(٢\sqrt{٣} - ٣)$ فإن : س = ...

($\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $\pm\sqrt{٣}$ ، ± ٣)

[١٤] إذا كان : $س^{٢} - ص^{٢} = ١٦$ ، $س - ص = \sqrt{٢}$ فإن : س + ص = ...

($٤\sqrt{٢}$ ، $٨\sqrt{٢}$ ، $١٤\sqrt{٢}$ ، $٣٢\sqrt{٢}$)

[١٥] إذا كان : المعكوس الضربي للعدد $\sqrt{س} - ١$ هو العدد $\frac{١}{٤}(\sqrt{س} + ١)$ فإن : س = ...

(٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢)

الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

١) $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ ب}}$

فمثلاً : $\sqrt{٢} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢ \times ٥} = \sqrt{١٠}$

٢) $\sqrt{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$

فمثلاً : $\sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : س $\sqrt{\text{ص}}$

لاحظ : يجب أن يكون أحد العددين مربع كامل بخلاف الواحد

(١) ضع كل مما يلي على صورة س $\sqrt{\text{ص}}$ حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة ممكنة :

[١] $\sqrt{٨} =$ ....

[٢] $\sqrt{٢٠} =$ ....

[٣] $\sqrt{٤٨} =$ ....

[٤] $٢\sqrt{٧٥} =$ ....

[٥] $\frac{١}{٢}\sqrt{٧٢} =$ ....

٣) $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ حيث : ب $\neq$ صفر

فمثلاً :

$\sqrt{\frac{٥}{٤}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٤}} = \frac{\sqrt{٥}}{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt{٥}$

$\sqrt{\frac{٩}{٢}} = \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$

٤) $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} \times \frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ ب}}}{\text{ب}}$ حيث : ب $\neq$ صفر

فمثلاً :

$\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

(٢) اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠} =$ ....

[٢] $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥} =$ ....

[٣] $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} =$ ....

[٤] $\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٣٢} =$ ....

العددان المترافقان :

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين موجبين فإن :

كلاً من العددين : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

هو مرافق للعدد الآخر

و يكون مجموعهما $= (\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) + (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

$= ٢\sqrt{أ} =$ ضعف الحد الأول

و حاصل ضربهما $= (\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) \times (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

$= (\sqrt{أ})^{٢} - (\sqrt{ب})^{٢} = أ - ب$

= مربع الحد الأول – مربع الحد الثانى

ملاحظة : حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدد نسبى

فمثلاً : مرافق العدد $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$ هو $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ و

يكون : مجموعهما $= ٢\sqrt{٣}$ ، و حاصل ضربهما $= ٣ - ٢ = ١$

(٣) أكمل ما يلى :

[١] مرافق العدد $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

[٢] مرافق العدد $(٣ - \sqrt{٧})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

[٣] مرافق العدد $(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٦})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

ملاحظة : إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ أو $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ فيجب وضعه فى أبسط صورة و ذلك بضرب البسط و المقام فى مرافق المقام

فمثلاً : لكتابة العدد $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ فى أبسط صورة نتبع ما يلى :

$$\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٣ (\sqrt{٥} + \sqrt{٢})}{٥ - ٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$$

(٤) أكتب ما يلى فى أبسط صورة :

[١] $\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} =$ ....

[٢] $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}} =$ ....

(٥) إذا كان : $\text{س} = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = \frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة كل من :

[١] $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

[٢] $\text{س}^{٢} - \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

(٦) إذا كان : $\text{س} = \sqrt{١٣} + \sqrt{٦}$ ، $\text{س}\,\text{ص} = ٧$

أوجد قيمة كل من :

[١] $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س}\,\text{ص} - ٥}$

[٢] $\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}$

(٧) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{١٢} - \sqrt{٣} = ...$ (٣ ، ٩ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)

[٢] $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٨} - \sqrt{٢} = ...$
($٢\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣٠}$ ، ٢)

[٣] $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} + \sqrt{٥}) = ...$
(٢ ، ١٢ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $-٢\sqrt{٥}$)

[٤] $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^{٢} = ...$
(١٠ ، ١٨ ، $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{١٨}$)

[٥] $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} = ...$
(١ ، $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$)

[٦] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥٠}$ هو ....
($\frac{١}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $-\frac{١}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، $-٥\sqrt{٢}$)

[٧] العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٨}$ ، $\sqrt{٣٢}$
هو .... ($\sqrt{٣٨}$ ، $\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $\sqrt{٨٠}$)

[٨] $\frac{١}{٢}\sqrt{٤٨} = ٢ \times ....$
($\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$)

[٩] إذا كان : $٢\sqrt{٢٧} - ٢\sqrt{٤٨} = س\sqrt{٣}$ فإن :
س = ... (٢ ، ٣ ، −٢ ، −٣)

[١٠] $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{١٠}(\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{١٠} = ...$
(١ ، $٢\sqrt{٣}$ ، −١ ، $-٢\sqrt{٣}$)

(٨) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المعكوس الضربى للعدد ($\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$) فى أبسط صورة هو ....

[٢] إذا كان : س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$
فإن : (س ص ، س + ص) = ...

[٣] إذا كان : س = ٢ + $\sqrt{٥}$ ، ص العدد المرافق للعدد س
فإن : $(س - ص)^{٢} = ...$

[٤] مساحة المثلث الذى طول قاعدته ($\sqrt{٢٨}$ + ٢) سم ، ارتفاعه ($\sqrt{٧}$ − ١) سم تساوى .... سم^{٢}

[٥] إذا كان : س = $\sqrt{٢} - ١$ ، س ص = ١ فإن :
ص = ...

[٦] $٤\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨} = ...$

[٧] $١٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} - ٨\sqrt{\frac{٣}{٢}} = ...$

أحمد الشنتورى

الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $\sqrt[3]{\frac{١}{٢}}$

١) $\sqrt[3]{\text{أ}} \times \sqrt[3]{\text{ب}} = \sqrt[3]{\text{أ ب}}$

فمثلاً : $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٥} = \sqrt[3]{٢ \times ٥} = \sqrt[3]{١٠}$

٢) $\sqrt[3]{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt[3]{\text{أ}} \times \sqrt[3]{\text{ب}}$

فمثلاً : $\sqrt[3]{٢٤} = \sqrt[3]{٨ \times ٣} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٣} = ٢\sqrt[3]{٣}$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : س $\sqrt[3]{\text{ص}}$

لاحظ : يجب أن يكون أحد العددين مكعب كامل بخلاف الواحد

(١) ضع كل مما يلى على صورة س $\sqrt[3]{\text{ص}}$ حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة ممكنة :

[١] $\sqrt[3]{١٦} =$ ....

[٢] $\sqrt[3]{-٤٠} =$ ....

[٤] $٢\sqrt[3]{٨١} =$ ....

[٥] $\frac{١}{٥}\sqrt[3]{٢٥٠} =$ ....

٣) $\frac{\sqrt[3]{\text{أ}}}{\sqrt[3]{\text{ب}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ حيث : ب ≠ صفر ، أ ، ب ∈ ح

أحمد الشنتوري

فمثلاً : $\frac{\sqrt[3]{٢٤}}{\sqrt[3]{٣}} = \sqrt[3]{\frac{٢٤}{٣}} = \sqrt[3]{٨} = ٢$

٤) $\sqrt[3]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[3]{\text{أ}}}{\sqrt[3]{\text{ب}}}$ حيث : ب ≠ صفر ، أ ، ب ∈ ح

أحمد الشنتوري

فمثلاً : $\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٣}}{\sqrt[3]{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٣}}{\sqrt[3]{٢}} \times \frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt[3]{٢}} \times \frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt[3]{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt[3]{١٢}$

(٢) اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{-٢٥٠} =$ ....

[٢] $\sqrt[3]{١٠٨} + \sqrt[3]{٣٢} =$ ....

[٣] $\sqrt[3]{٨١} - ٣\sqrt[3]{-\frac{١}{٩}} =$ ....

[٤] $\sqrt[3]{٢٥٠} - ٢\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{٥٤} =$ ....

(٣) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt[3]{٨١} - \sqrt[3]{٢٤} = ...$

(٣ ، $\sqrt[3]{٥٧}$ ، $\sqrt[3]{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)

[٢] $\sqrt[3]{١٣٥} + \sqrt[3]{٤٠} = ...$

(٥ ، $٥\sqrt[3]{٥}$ ، $\sqrt[3]{٥}$ ، $\sqrt[3]{١٧٥}$)

[٣] $٢\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{٩} = ...$

(٦ ، ٣ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt[3]{٢٧}$)

[٤] $\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٢} = ...$

($\sqrt[3]{٢}$ ، $\sqrt[3]{٤}$ ، $\sqrt[3]{٨}$ ، $\sqrt[3]{١٦}$)

[٥] $\sqrt[3]{-٢٤} - ٩\sqrt[3]{\frac{٨}{٩}} = ...$

($-٨\sqrt[3]{٣}$ ، $٨\sqrt[3]{٣}$ ، $١٢\sqrt[3]{٣}$ ، $٢٠\sqrt[3]{٩}$)

(٤) أختصر كلاً مما يلى لأبسط صورة :

[١] $\frac{٧}{٣}\sqrt{١٨} + \sqrt[3]{٥٤} - \sqrt{٩٨} + \sqrt[3]{١٦} = ...$

[٢] $\sqrt[3]{٨١} - \sqrt{٢٨} + \sqrt[3]{-٢٤} + \sqrt{٦٣} = ...$

(٥) إذا كان : $س = ٣ + \sqrt[3]{٦}$ ، $ص = ٣ - \sqrt[3]{٦}$

أوجد قيمة كل من :

[١] $(س - ص)^{٣}$　　[٢] $(س + ص)^{٣}$

الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

الدائرة :

محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية
مساحة سطح الدائرة = π نق^2 وحدة مربعة



حيث : نق طول نصف قطر الدائرة ،

π هى النسبة التقريبية بين محيط الدائرة و طول القطر

، $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤

فمثلاً :

لايجاد مساحة دائرة محيطها ٣١,٤ سم ، (π = ٣,١٤) نتبع ما يلى :

بما أن : محيط الدائرة = ٢ π نق

إذن　:　٣١,٤ = ٢ × ٣,١٤ نق = ٦,٢٨ نق

إذن　:　نق = ٣١,٤ ÷ ٦,٢٨ = ٥ سم

، مساحة سطح الدائرة = π نق^2 = ٣,١٤ × ٥ × ٥ = ٧٨,٥ سم^2

(١) دائرة محيطها ٨٨ سم أوجد مساحة سطحها ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٢) دائرة مساحة سطحها ٣١٤ سم^2 أوجد محيطها (π = ٣,١٤)

(٣) فى الشكل المقابل :

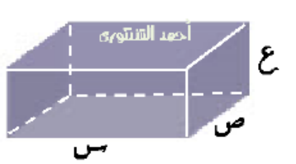
أ ب جـ ء مربع مرسوم داخل دائرة م

فإذا كان محيط الجزء المظلل ٣٥ سم أوجد :

مساحة المربع ، مساحة الدائرة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

أ　ء　هـ　م　و　ب　ى　جـ

متوازى المستطيلات :



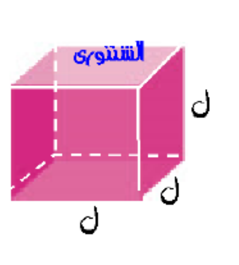
هو مجسم جميع أوجهه مستطيلة الشكل
و كل وجهين متقابلين متطابقان
إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص ، ع فإن :

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
= ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
= ٢ (س ص + ص ع + س ع) وحدة مربعة

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع
= س × ص × ع وحدة مكعبة

حالة خاصة : المكعب



هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية
إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن :

مساحة كل وجه = $ل^{٢}$ وحدة مربعة

المساحة الجانبية = ٤ $ل^{٢}$ وحدة مربعة

المساحة الكلية = ٦ $ل^{٢}$ وحدة مربعة

الحجم = $ل^{٣}$ وحدة مكعبة

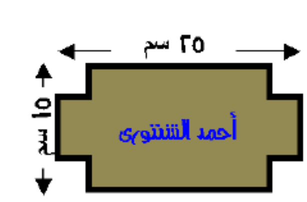


(٤) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، و حجمه ٧٢٠ $سم^{٣}$ و ارتفاعه ٥ سم أوجد حجمه

(٥) مكعب حجمه ١٢٥ $سم^{٣}$ أوجد مساحته الكلية

(٦) أيهما أكبر حجماً مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{2} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{2}$ ، ٥ $\sqrt{2}$ ، ٥ سم

(٧) قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥ سم ، ١٥ سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً على شكل متوازى مستطيلات أوجد حجمه و مساحته الكلية



(٨) مكعب حجمه ١٧٢٨ سم^{3} ، قطع عند أحد أحرفه متوازى مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٢ سم ، ١ سم أوجد المساحة الكلية للجزء المتبقى من المكعب

(٩) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و إرتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم أوجد حجمه

الأسطوانة الدائرية القائمة :

هى مجسم له قاعدتان متوازيتان و متطابقتان كل منهما عبارة سطح دائرة أما السطح الجانبى فهو سطح منحنى يسمى سطح الأسطوانة

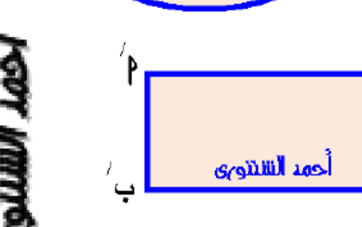
فى الشكل المقابل :

إذا كان : م ، م/ مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن :

م م/ هو ارتفاع الأسطوانة ، م ب = م أ

كل منهما = طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة

، $\overline{أب}$ // $\overline{م م/}$ و إذا قطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{أب}$ و بسطنا هذا السطح نحصل على سطح المستطيل أ ب ب/ أ/ و يكون : أ ب = ارتفاع الأسطوانة ، أ أ/ = محيط قاعدة الأسطوانة



، مساحة المستطيل أ ب ب/ أ/ = المساحة الجانبية للأسطوانة

> المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع
> = ٢ π نق ع وحدة مربعة

> المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
> = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

> حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع
> = π نق^{٢} ع وحدة مكعبة

أحمد الشنتورى

(١٠) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أ ب حـ ء فيه أ ب = ١٠ سم ، ب حـ = ٢٢ سم ، طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{أ ب}$ على $\overline{ء حـ}$ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١١) أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها = ٤٤ سم ، حجمها = ٣٨٥٠ سم^{٣} أوجد إرتفاعها ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

أحمد الشنتورى

(١٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^{٣} و ارتفاعها ٢٤ سم أوجد مساحتها الكلية (π = ٣,١٤)

(١٣) أيهما أكبر حجماً أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم و ارتفاعها ١٠ سم أم مكعب طول حرفه ١١ سم ؟ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

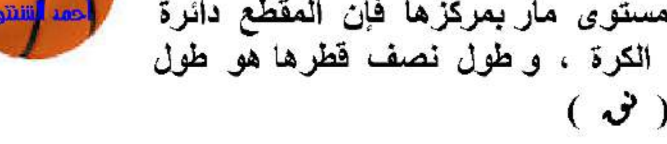


(١٤) قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١١ سم و ارتفاعها ١٠,٥ سم صهرت و حولت إلى ٣ مكعبات متساوية الحجم أوجد طول حرف المكعب الواحد ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٥) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها و حجمها يساوى ٢٧ π سم^{٣} أوجد مساحتها الجانبية بدلالة π

الكرة :

هى مجسم سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة) إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها هو مركز الكرة ، و طول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة (نق)



مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة

(١٦) كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^{٢} أوجد حجمها (π = ٣,١٤)

(١٧) كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم صهرت و حولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم أوجد ارتفاع الأسطوانة

(١٨) متوازى مستطيلات من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ ، ٢٤ ، ٢١ سم شكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطر الكرة (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(١٩) كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وضعت داخل مكعب فمست أوجهه الستة
أوجد مساحة سطح الكرة ثم أوجد حجم المكعب

(٢٠) كرة معدنية جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى و الخارجى ٢,١ سم ، ٣,٥ سم على الترتيب أوجد كتلتها علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جرام ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٢١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] حجم الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[٣]{٣}$ سم يساوى .... سم^{٣}
(٤ π ، ٤ $\sqrt{٣}$ π ، $\frac{٤}{٣}$ π ، $\frac{٩}{٤}$ π)

[٢] طول نصف قطر الكرة التى مساحتها ٩ π سم^{٢} يساوى .... سم
(٩ ، ٦ ، ٣ ، ١,٥)

[٣] المساحة الكلية لمكعب حجمه ٨ سم^{٣} تساوى .... سم^{٢}
(٢ ، ٤ ، ١٦ ، ٢٤)

[٤] طول نصف قطر دائرة مساحتها ٢ π سم^{٢} يساوى .... سم
(١ ، ٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ٤)

[٥] إرتفاع متوازى المستطيلات الذى مساحته الجانبية ٢٤٠ سم^{٢} و قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم يساوى .... سم
(١٠ ، ٦ ، ٥ ، ٣)

[٦] إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها نق هى ٨ π نق سم^{٢} فإن ارتفاعها = ... سم
(٨ ، ٤ ، ١٠ ، ١٦)

الدرس الحادى عشر : حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

١) المعادلة هى :

جملة رياضية تحتوى على متغير أو أكثر و تحتوى علاقة التساوى بين عبارتين رياضيتين

فمثلاً :

الجملة الرياضية : س − ١ = ٧ تسمى معادلة حيث :
تحتوى على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوى (=)
بين العبارتين (س − ١) بالطرف الأيمن ، (٧) بالطرف الأيسر

٢) درجة المعادلة هى :

أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المعادلة

فمثلاً :

المعادلة : ٢ س − ١ = ٧ من الدرجة الأولى ،

المعادلة : س^{٢} + ٥ = ٩ من الدرجة الثانية ، .... و هكذا

٣) حل المعادلة هو :

إيجاد قيمة المتغير (المجهول) التى تحقق تساوى طرفى المعادلة

٤) مجموعة حل المعادلة :

هى المجموعة التى تحقق عناصرها المعادلة

ملاحظة :

فى حالة المعادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد : للمجهول قيمة واحدة

٥) خواص علاقة التساوى :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية فإن :

١] إذا كان : س = ص فإن : س ± ع = ص ± ع
٢] إذا كان : س = ص فإن : س × ع = ص × ع
٣] إذا كان : س × ع = ص × ع فإن : س = ص ، ع ≠ ٠ .

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح :

١) ٢ س − ١ = ٧ بإضافة (١) للطرفين ينتج :
٢ س = ٨ بقسمة طرفى المعادلة على (١) ينتج :
س = ٤ ∴ مجموعة الحل = { ٤ }

ملاحظة :

يمكن ضرب طرفى المعادلة : ٢ س = ٨ فى المعكوس الضربى لمعامل س و هو $\frac{١}{٢}$ كما يلى :

$\frac{١}{٢}$ × ٢ س = $\frac{١}{٢}$ × ٨ ∴ س = ٤

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :

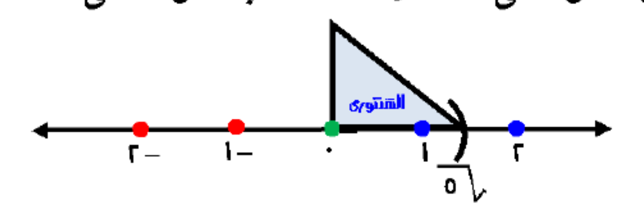
−٥ −٤ −٣ −٢ −١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

٢) $\sqrt{٥}$ س + ١ = ٦ بإضافة (− ١) للطرفين ينتج :
$\sqrt{٥}$ س = ٥ بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ينتج :

س = $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ × $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ = $\sqrt{٥}$

∴ مجموعة الحل = { √٥ }

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى



(أ) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س + ٧ = ١

[٢] س + ٤ = ٤

[٣] س + ٢ = ٠

[٤] √٣ س – ٢ = ١

[٥] س – ١ = √٢

[٦] ٧ س – √٧ = ٦ √٧

أحمد الشتورى

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

١) المتباينة :

هى جملة رياضية تتضمن علامة التباين بين عبارتين رياضيتين

ملاحظة :

علامات التباين هى :

> : أكبر من ، < : أقل من

≥ : أكبر من أو يساوى ، ≤ : أقل من أو يساوى

فمثلاً :

الجملة الرياضية : س − ١ > ٧ تسمى متباينة حيث :
تحتوى على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوى (>)
بين العبارتين (س − ١) بالطرف الأيمن ، (٧) بالطرف الأيسر

٢) درجة المتباينة هى :

أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المتباينة

فمثلاً :

المتباينة : ٢س − ١ < ٧ من الدرجة الأولى ،

المتباينة : س^٢ + ٥ ≥ ٩ من الدرجة الثانية ، .... و هكذا

٣) حل المتباينة هو :

إيجاد قيم المتغير (المجهول) التى تحقق تساوى طرفى المعادلة

٤) مجموعة حل المعادلة :

هى مجموعة العناصر التى يحقق كل منها المتباينة
و تكتب فى صورة فترة

ملاحظة : فى حالة المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد :
للمجهول قيمة واحدة أو أكثر

٥) خواص علاقة التباين :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية و كان س > ص فإن :

أ] س + ع > ص + ع
سواء كانت ع موجبة أو سالبة (خاصية الإضافة)

٢] إذا كان : ع > ٠ فإن : س × ع > ص × ع
خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب

٣] إذا كان : ع < ٠ فإن : س × ع < ص × ع
خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب

أى أن : عند ضرب (أو قسمة) طرفى المتباينة فى (على) عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين

ملاحظة :

يمكن استنتاج خواص علاقة التباين السابقة فى جميع علاقات التباين : > أو < أو ≥ أو ≤

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح :

أ) ٣س + ١٠ > ١ بإضافة (− ١٠) للطرفين

٣س > − ٩

بضرب طرفى المتباينة فى (⅓ < ٠) ينتج :

س > − ١ ∴ مجموعة الحل =]−∞ ، −١[

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :

٢) ٣ – ٢ س ≥ ١ بإضافة (– ٣) للطرفين

– ٢ س ≥ – ٢

بضرب طرفى المتباينة فى (– ١/٢ < ٠) ينتج :

س ≤ ١ ∴ مجموعة الحل =] ١ ، ∞]

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :

٣) – ٥ < ٣ س – ٢ ≥ ٧ بإضافة (٢) للأطراف

– ٣ < ٣ س ≥ ٩ بالضرب فى (١/٣ > ٠) ينتج :

– ١ < س ≥ ٣ ∴ مجموعة الحل =] – ١ ، ٣]

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :

٤) س + ٢ ≥ ٣ س + ٢ ≥ س + ٨ بإضافة (– س)

٢ ≥ ٢ س + ٢ ≥ ٨ بإضافة (– ٢)

٠ ≥ ٢ س ≥ ٨ بالضرب فى (١/٢ > ٠)

٠ ≥ س ≥ ٤ ∴ مجموعة الحل =] ٠ ، ٤]

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :

أحمد الشتوى

(٢) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س – ٢ > ١

[٢] ٥ – ٤ س ≤ – ٣

[٣] – ٣ < ٢ س – ١ ≥ ٥

[٤] $\frac{١}{٢}$ س + ١ ⩾ ٢

[٥] س − ٢ ⩾ ٣ س − ٥

[٦] س − ١ ⩾ ٣ س − ٣ ⩾ س + ٥

[٧] | − ٢ | > ٣ س − ١ ⩾ ٨

[٨] $\sqrt[٣]{-٨}$ > س + ١ ⩾ $\sqrt{٩}$

(٣) إذا كانت :] ٤ ، ٧ [هى مجموعة حل المتباينة :
أ ⩾ س − ٣ ⩾ ب أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المعادلة : ٢ س − ٣ = ٧ فى ح هى ....
({٤} ، {١٠} ، {٥} ، ∅)

[٢] مجموعة حل المعادلة : √٢ س = ٤ فى ح هى ....
({√٢} ، {٢√٢} ، {٤√٢} ، ∅)

[٣] مجموعة حل المعادلة : س − √٣ = √٣ فى ح هى ....
({√٣} ، {٢√٣} ، {صفر} ، ∅)

[٤] مجموعة حل المتباينة : س < ٧ فى ح هى ....
( ]٧ ، ∞] ، [٧ ، ∞] ، [−∞ ، ٧[، [−∞ ، ٧])

[٥] مجموعة حل المتباينة : −١ > −س ≥ ١ فى ح هى ....
([−١ ، ١] ، [−١ ، ١[،]−١ ، ١[،]−١ ، ١])

[٦] مجموعة حل المتباينة : −١ ≥ س − ١ ≥ ١ فى ح هى ....
([−١ ، ١] ، [٠ ، ٢] ، [٠ ، ١] ، [−١ ، ٢])

[٧] إذا كان : −٢ > س > ٢ فإن : ٢ س + ٣ ∋ ....
([−١ ، ٧[، [−١ ، ٥[، [−٤ ، ٦[، [−١ ، ٧])

[٨] العدد : ٢ ∋ مجموعة حل المتباينة ....
(س > ٢ ، س < ٢ ، −س ≥ −٢ ، −س ≤ ٢)

[٩] إذا كان : س ∋]−٢ ، ∞[
فإن : العبارة تمثل المتباينة ....
(س ≥ −٢ ، س ≤ −٢ ، س > −٢ ، س < −٢)

(٥) أكمل ما يلى لتحصل على عبارة صحيحة حيث س ∋ ح :

[١] إذا كان : س + ٥ = ١١ فإن : ٦ س = ...

[٢] إذا كان : ٣ س = ٦ فإن : س + ٦ = ...

[٣] إذا كان : ٢ س − ١ = ٧ فإن : ½ س = ...

[٤] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : س + ك = ٤ هى { ٣ }
فإن : ك = ...

[٥] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : ٣ س + ٢ ك = ٥ هى { ١ } فإن : ك = ...

[٦] مجموعة حل المعادلة : س + ... = ٧ هى { −٢ }

[٧] مجموعة حل المتباينة : س > ٣ هى ....

[٨] مجموعة حل المتباينة : س ≤ ١ هى ....

[٩] مجموعة حل المتباينتين : س > ٣ ، س ≤ ١ معاً هى ....

[١٠] إذا كان : أ > ب فإن : أ − ٣ .... ب − ٣

[١١] إذا كان : أ > ب ، س = −٣ فإن : أ س .... ب س

[١٢] إذا كان : أ > ب ، س = ٣ فإن : أ س .... ب س

[١٣] إذا كان : −١ > س > ١ فإن : ٢ س + ١ ∋ [....]

الوحدة الثانية العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

تمهيد :

أشترى محمد كراسات و أقلام فإذا كان ثمن الكراسة ستة جنيهات ، و ثمن القلم أربعة جنيهات ، ودفع للبائع ٥٠ جنيهاً فما هى الإمكانات المختلفة لعدد الأقلام و الكراسات التى أشتراها محمد ؟

لدراسة الإمكانات المختلفة

نفرض أن : عدد الأقلام = س ، عدد الكراسات = ص

∴ ٦ س + ٤ ص = ٥٠

تسمى هذه العلاقة : معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين

يمكن قسمة طرفى المعادلة على ٢ فنحصل على معادلة مكافئة لها

و هى : ٣ س + ٢ ص = ٢٥ و يمكن كتابتها على الصورة :

٢ ص = ٢٥ − ٣ س أى أن : ص = $\frac{٢٥ - ٣ س}{٢}$

لاحظ أن :

س ، ص أعداد طبيعية

و فى هذه الحالة تكون س عدداً فردياً

يمكن تكوين الجدول المقابل لمعرفة الإمكانات المختلفة

س	ص	(س ، ص)
١	١١	(١ ، ١١)
٣	٨	(٣ ، ٨)
٥	٥	(٥ ، ٥)
٧	٢	(٧ ، ٢)
٩	سالبة	لا تصلح

(١) مع مؤمن أوراق مالية فئة ٥ جنيهات ، و أوراق مالية فئة ٢٠ جنيهاً أشترى مؤمن من مركز تجارى بما قيمته ٨٥ جنيهاً ، ما الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه ؟

(٢) مثلث متساوى الساقين محيطه ١٩ سم ، ما الإمكانات المختلفة لأطوال أضلاعه ، علماً بأن أطوال أضلاعه ∈ ص+

تذكر : مجموع طولى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث

أحمد الشتوى

دراسة العلاقة بين متغيرين

العلاقة : ٢ س + ب ص = حـ حيث : ٢ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ، و يمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) تحقق هذه العلاقة

فمثلاً :

لدراسة العلاقة : ٣ س + ص = ٢
نوجد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س و إيجاد قيمة ص المناظرة أو العكس كما يلى :

بوضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ص = ٢
∴ ص = ٢ ∴ (٠ ، ٢) يحقق العلاقة
بوضع س = ١ ∴ ٣ × ١ + ص = ٢
∴ ص = – ١ ∴ (١ ، – ١) يحقق العلاقة
بوضع س = – ١ ∴ ٣ × – ١ + ص = ٢
∴ ص = ٥ ∴ (– ١ ، ٥) يحقق العلاقة

و هكذا نجد أن هناك عدداً لا نهائى من الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق هذه العلاقة

ملاحظة :

يمكن كتابة العلاقة : ٣ س + ص = ٢ كما يلى :
ص = ٢ – ٣ س أى : وضع أحد المتغيرين فى طرف مستقل ثم إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق هذه العلاقة

(٣) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات التالية :

[١] س – ٢ ص = ٥

[٢] ٢ س + ٥ ص = ١٠

(٤) بين أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س – ص = ١
كما بالمثال :

مثال : (١ ، ١)
نضع : س = ١ ، ص = ١
∴ ٢ س – ص = ٢ × ١ – ١ = ٢ – ١ = ١
∴ (١ ، ١) يحقق العلاقة

[١] (٥ ، ٣)

[٢] (٣ ، ٥)

[٣] (– ٢ ، – ٥)

(٥) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : (– ٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ١
فإن : ك = ...
[٧ ، – ٧ ، ٥ ، – ٥]

[٢] إذا كان : (٢ ، – ٥) يحقق العلاقة : ٣ س – ص + ك = ٠
فإن : ك = ...
[١ ، – ١ ، ١١ ، – ١١]

[٣] إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س – ص = ٦
فإن : ك = ...
[١ ، ٢ ، – ١ ، – ٢]

[٤] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥
هو ....
[(– ١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، – ٣)]

[٥] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقتين : س + ص = ٥ ،
٢ س + ص = ٧ معاً هو ....
[(– ٢ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، – ٣)]

[٦] الجدول التالى يبين العلاقة بين س ، ص و هى ....

س	٣	٤	٥
ص	١٠	١٣	١٦

[ص = س + ٧ ، ص = س – ٧ ،
ص = ٣ س + ١ ، ص = س + ١]

التمثيل البيانى للعلاقة بين متغيرين

العلاقة : أ س + ب ص = جـ حيث : أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص و يمثلها بيانياً خط مستقيم

فمثلاً :

لتمثيل العلاقة : ٣ س + ص = ٢ بيانياً

نوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة كما سبق و يمكن وضعها فى جدول كالتالى :

س	٠	١	− ١
ص	٢	− ١	٥

و نعين فى النظام الإحداثى المتعامد النقط التى تمثل الأزواج المرتبة : (٠ ، ٢) ، (١ ، − ١) ، (− ١ ، ٥)

و نرسم الخط المستقيم المار بها فيكون هو التمثيل البيانى لهذه العلاقة

(الخط المستقيم باللون الأزرق يمثل العلاقة)

لاحظ أن :

جميع نقط المستقيم الممثل للعلاقة تعين أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة



حالات خاصة :

١) إذا كان : أ = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة : ب ص = جـ

فمثلاً :

العلاقة : ٢ ص = ٣

أى : ص = $\frac{٣}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر

و هو يمر بالنقطة (٠ ، $\frac{٣}{٢}$)

و يكون موازياً لمحور السينات

ملاحظة : العلاقة : ص = ٠ يمثلها محور السينات

٢) إذا كان : ب = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة : أ س = جـ

فمثلاً :

العلاقة : ٢ س = − ١

أى : س = − $\frac{١}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأخضر

و هو يمر بالنقطة (− $\frac{١}{٢}$ ، ٠)

و يكون موازياً لمحور الصادات

ملاحظة : العلاقة : س = ٠ يمثلها محور الصادات

٣) إذا كان : حـ = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

أ س + ب ص = ٠

فمثلاً :

العلاقة : ٢ س + ص = ٠

أى : ص = − ٢ س

يمثلها الخط المستقيم باللون البنى

و هو يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

كما بالشكل المقابل :

س	٠	١	− ١
ص	٠	− ٢	٢

(٦) مثل بيانياً العلاقة : ٢ س − ص = ٣

بوضع س = ...   ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ...   ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

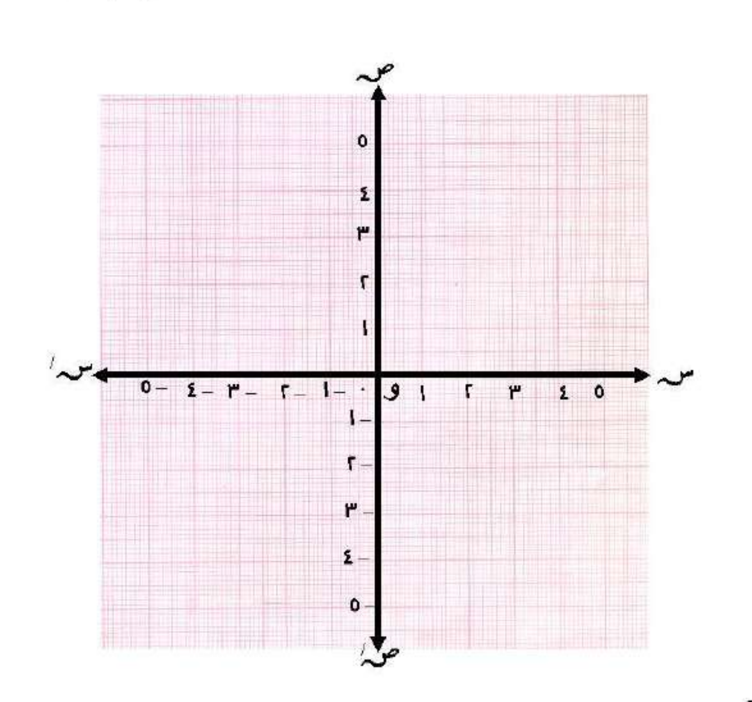
بوضع س = ...   ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ...   ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

بوضع س = ...   ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ...   ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

س			
ص			



ملاحظات :

١) يمكن تكوين الجدول مباشرة

٢) يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم الممثل للعلاقة :

أ س + ب ص = حـ   مع محور السينات بوضع : ص = ٠

، و مع محور الصادات بوضع : س = ٠

فمثلاً : العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦

بوضع : ص = ٠ ينتج : س = ٣

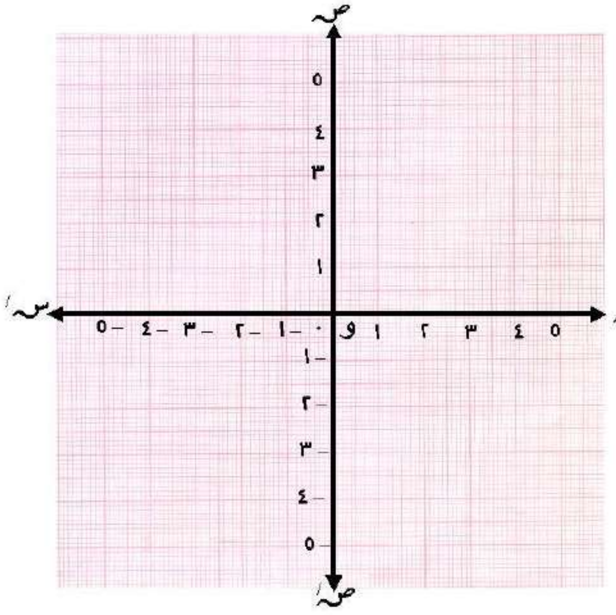
∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هى (٣ ، ٠)

بوضع : س = ٠ ينتج : ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هى (٠ ، ٢)

(٧) أوجد نقط تقاطع المستقيم : ٢ س – ص = ٤ مع محورى الإحداثيات ثم أرسم هذا المستقيم

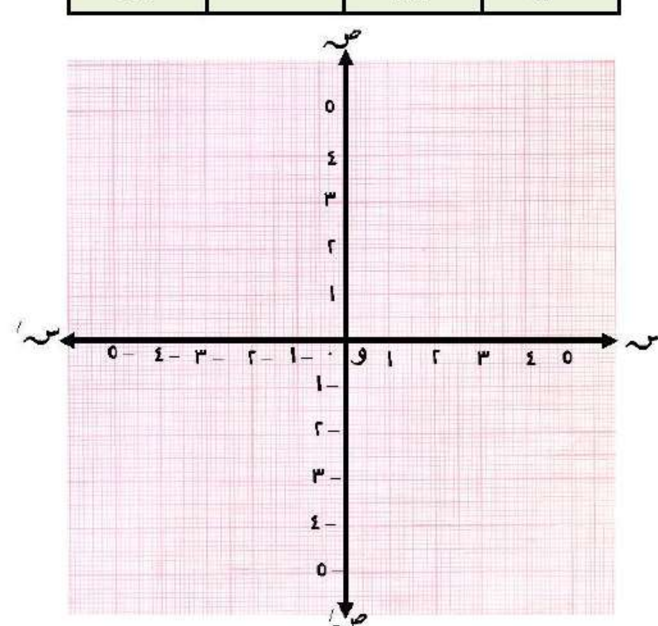
س	٠	....	....
ص	....	٠	....



(٨) إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س – ص = ك يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، م) أوجد قيمة كل من : ك ، م

(٩) ارسم المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦ ، و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ﻫ ، و يقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و ﻫ ب حيث (و) نقطة الأصل

س	٠	....	....
ص	....	٠	....

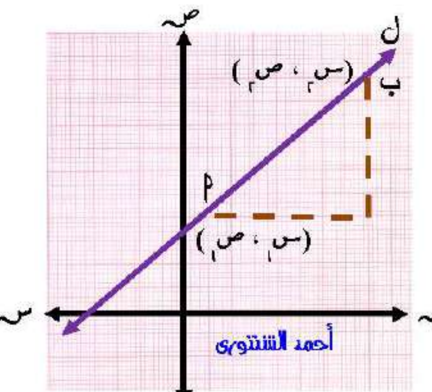


أحمد الشتورى

الدرس الثانى : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

تمهيد :

إذا تحركت نقطة على خط مستقيم ل من الموضع أ ($س_1$ ، $ص_1$) إلى الموضع ب ($س_2$ ، $ص_2$) حيث : $س_2 > س_1$ ، و كل من أ ، ب ∈ المستقيم ل فإن :



١) التغير فى الإحداثى السينى = $س_2 - س_1$

و يسمى بالتغير الأفقى

٢) التغير فى الإحداثى الصادى = $ص_2 - ص_1$

و يسمى بالتغير الرأسى

(من الممكن أن يكون موجباً أو سالباً أو مساوياً الصفر)

٣) النسبة بين التغير فى الإحداثى الصادى و التغير فى الإحداثى السينى تسمى ميل الخط المستقيم و يرمز له بالرمز (م)

مما سبق نستنتج :

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$$

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \quad \text{حيث :} \quad س_2 > س_1$$

الحالات المختلفة للتغير الرأسى ($ص_2 - ص_1$) :

[١] إذا كانت : أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٣) فإن :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{٣ - ٢}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$$

نلاحظ :

١) تحركت نقطة أ على الخط المستقيم لأعلى لتصل إلى نقطة ب

٢) $ص_2 > ص_1$ أى أن : ص تزداد بزيادة س

٣) ميل المستقيم = عدد موجب ($م > ٠$)

[٢] إذا كانت : أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ١) فإن :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٠} = -\frac{٣}{٢}$$

نلاحظ :

١) تحركت نقطة أ على الخط المستقيم لأسفل لتصل إلى نقطة ب

٢) $ص_2 < ص_1$ أى أن : ص تقل بزيادة س

٣) ميل المستقيم = عدد سالب ($م < ٠$)

[٣] إذا كانت : ﺃ (– ١ ، ٢) ،

ب (٣ ، ٢) فإن :

ميل $\overleftrightarrow{ﺃب}$ = $\frac{٢ - ٢}{٣ - (- ١)}$

= $\frac{٠}{٤}$ = صفر

نلاحظ : ١) تحركت نقطة ﺃ أفقياً لتصل إلى نقطة ب

٢) $ص_ﺃ = ص_ب$

أى أن : ص ثابتة بتغير س

٣) ميل المستقيم = ٠ (م = ٠)

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ٠

[٤] إذا كانت : ﺃ (٢ ، ١) ،

ب (٢ ، ٤) فإن :

لا يمكن حساب الميل لأن تعريف الميل يشترط وجود تغير فى الإحداثى السينى

أى : $س_ب - س_ﺃ \neq ٠$

نلاحظ : ١) تحركت نقطة ﺃ رأسياً لتصل إلى نقطة ب

٢) $س_ﺃ = س_ب$

٣) ميل المستقيم غير معرف

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

أحمد الششتوى

(١) أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل نقطتين مما يلى :

[١] ﺃ (١ ، ١) ، ب (٤ ، ٢)

[٢] ﺃ (٣ ، – ٥) ، ب (٦ ، – ٥)

[٣] ﺃ (– ٢ ، ٢) ، نقطة الأصل

[٤] ﺃ (– ١ ، – ٣) ، ب (– ٢ ، – ٤)

(٢) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ١) ، (س ، ٦) يساوى ٥ أوجد قيمة : س

(٣) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ص) ، (–١ ، ٠) يساوى $\frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة : ص

(٤) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقط (٣ ، –١) ، (س ، ١) ، (٩ ، ص) يساوى $\frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة كل من : س ، ص

(٥) إذا كان : أ (٢ ، –١) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٥) أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ثم أذكر ماذا تلاحظ ؟

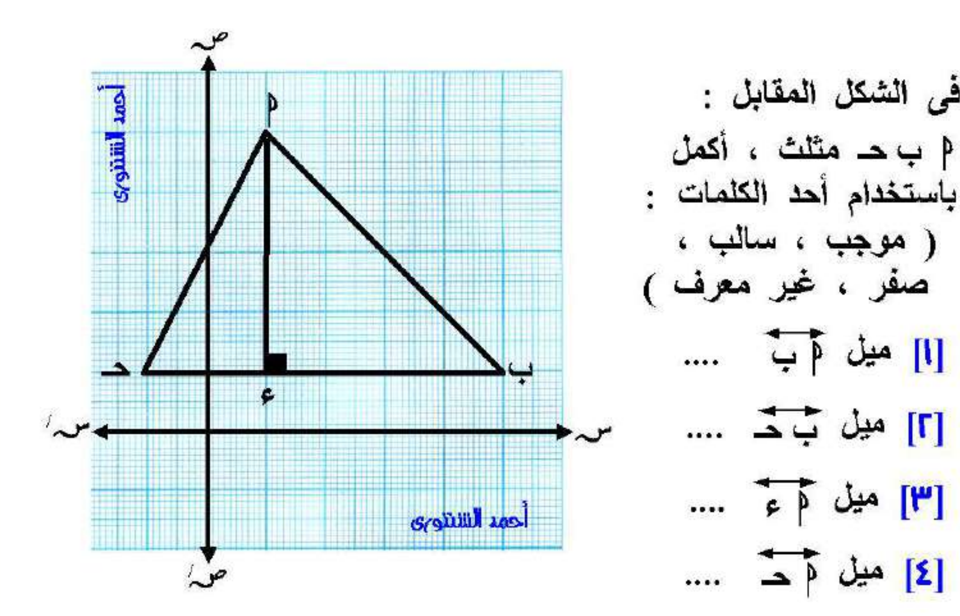
(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك) يوازى محور السينات أوجد قيمة : ك

(٧) أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، – ١) ، (٢ ، ١) يساوى ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (– ٢ ، – ٧)

(٨) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ (– ١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ثم بين ما إذا كانت النقطة حـ (٨ ، ١) تقع على $\overleftrightarrow{أب}$ أم لا ؟

(٩) فى الشكل المقابل :
أ ب حـ مثلث ، أكمل باستخدام أحد الكلمات : (موجب ، سالب ، صفر ، غير معرف)

[١] ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ....
[٢] ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ ....
[٣] ميل $\overleftrightarrow{أء}$ ....
[٤] ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ ....



أحمد الشتورى

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم :

نعلم أن :

إذا كانت هناك علاقة خطية بين متغيرين س ، ص فإن :

ميل الخط المستقيم الذى يمثل هذه العلاقة = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$

أى أن : ميل الخط المستقيم (م) يعبر عن معدل التغير فى ص بالنسبة إلى س

و يوجد فى حياتنا العديد من التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين و التى نحتاج فيها لمعرفة معدل التغير مثل :
التغير فى حركة سيارة أو دراجة – التغير فى استهلاك الوقود – التغير فى رأس مال أحدى الشركات .... الخ

تطبيق (١) : الشكل المقابل يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٦ سنوات و منه نلاحظ :

رأس المال بآلاف الجنيهات
السنوات
أحمد الشتورى

١) أ = (٠ ، ٢٠) ، ب = (٢ ، ٤٠) ، حـ = (٤ ، ٤٠) ، ء = (٦ ، ٣٠)

٢) ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٤٠ - ٢٠}{٢ - ٠}$ = ١٠

و هو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال أول سنتين بمعدل ١٠ آلاف جنيه
(أى : ١٠ آلاف جنيه لكل سنة)

٣) ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\frac{٤٠ - ٤٠}{٤ - ٢}$ = صفر و هو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً خلال السنتين الثالثة و الرابعة

٤) ميل $\overleftrightarrow{\text{حـء}}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{٦ - ٤}$ = − ٥ و هو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه
(أى : ٥ آلاف جنيه لكل سنة)

٥) رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند أ = ٢٠ ألف جنيه

ملاحظات :

(١) إذا كان : الميل موجب فإن : معدل التغير يتزايد
(٢) إذا كان : الميل سالب فإن : معدل التغير يتناقص
(٣) إذا كان : الميل = صفر فإن : معدل التغير ثابت
(٤) تمثل العلاقة بين المتغيرين فى الربع الأول على الشبكة التربيعية المتعامدة
(٥) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور الصادات فى النقطة (٠ ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة الإبتدائية (الصغرى) للمتغير ص
(٦) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور الصادات فى النقطة (٠ ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة النهائية (العظمى) للمتغير ص

(٧) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور السينات فى النقطة (س ، ٠) فإن : س تعبر عن القيمة الإبتدائية (الصغرى) للمتغير س

(٨) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور السينات فى النقطة (س ، ٠) فإن : س تعبر عن القيمة النهائية (العظمى) للمتغير س

تطبيق (٢) : الشكل المقابل :

يوضح حركة دراجة حيث الزمن ن بالساعة ، و المسافة ف بالكيلو متر بين مدينتين ذهاباً و عودة

و منه نلاحظ :

[١] أ = (٠ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٥٠) ، حـ = (٦ ، ٥٠) ، ء = (١٠ ، ٠)

[٢] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة الذهاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$

$= \frac{٥٠ - ٠}{٤ - ٠} = ١٢,٥$ كم / س

[٣] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة العودة = ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$

$= \frac{٠ - ٥٠}{١٠ - ٥} = - ١٠$ كم / س

و الإشارة السالبة تعنى أن الدراجة تتحرك فى عكس إتجاه حركتها الأولى بسرعة ١٠ كم / س

[٤] القطعة المستقيمة الأفقية تبين توقف الدراجة لمدة ساعة بعد أن تحركت مسافة ٥٠ كم ، ثم تبدأ رحلة العودة

[٥] المسافة الكلية = ١٠٠ كم ، و الزمن الكلى = ١٠ ث

[٦] السرعة المتوسطة للدراجة خلال الرحلة كلها = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

$= \frac{١٠٠}{١٠} = ١٠$ كم / س

ملاحظات :

(١) إذا كانت السيارة أو الدراجة أو .... تقطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية فإنها تتحرك بسرعة منتظمة و الذى يحددها ميل المستقيم الذى يمثل العلاقة بين السرعة و الزمن أى أن :

السرعة المنتظمة للسيارة (ع) = معدل التغير فى المسافة (ف) بالنسبة للزمن (ن) = ميل المستقيم (م)

، و إذا كانت هذه العلاقة لا تمثل خط مستقيم واحد بل عدة قطع مستقيمة فإن :

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

تطبيق (٣) :

ملأ شخص خزان سيارته بالوقود و سعة هذا الخزان ٤٠ لتراً و بعد أن تحرك ١٢٠ كم وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ الخزان

لرسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان و المسافة التى قطعتها السيارة

حيث العلاقة خطية نلاحظ أن :

١) عند البدء : ؟ = (٠ ، ٤٠)

أي أن : المسافة المقطوعة (ف) = ٠ كم ، و كمية الوقود المتبقية = ٤٠ لتراً

٢) بعد قطع مسافة ١٢٠ كم

: ب = (١٢٠ ، ٣٠)

أي أن : ف = ١٢٠ كم ، و كمية الوقود المتبقية = ٣٠ لتراً

كمية الوقود (لتر)
٦٠
٥٠
٤٠
٣٠
٢٠
١٠
؟
ب
أحمد الشتوري
المسافة (كم)
٠ ٤٠ ٨٠ ١٢٠ ١٦٠ ٢٠٠ ٢٤٠ ٢٨٠

و يكون : ميل $\overleftrightarrow{؟ب}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{١٢٠ - ٠}$ = $-\frac{١}{١٢}$

و هذا يعني أن كمية الوقود تتناقص بمعدل لتر واحد كل ١٢ ساعة

٣) يفرغ الخزان عندما تقطع السيارة مسافة = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}}$

= $\frac{٤٠}{\frac{١}{١٢}}$ = ٤٨٠ كم

، $\overleftarrow{؟ب}$ يقطع المحور الأفقي (محور المسافة) في النقطة (٤٨٠ ، ٠)

أحمد الشتوري

(أ) الشكل المقابل :

يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات

أكمل ما يلي :

رأس المال بالآف الجنيهات
٧٠
٦٠
٥٠
٤٠
٣٠
٢٠
١٠
؟
ب
حـ
ء
السنوات
٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

[١] ؟ = (.... ، ....)

ب = (.... ، ....)

حـ = (.... ، ....)

ء = (.... ، ....)

[٢] ميل $\overleftrightarrow{؟ب}$ =

= $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

و هو يعبر عن ....

[٣] ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

و هو يعبر عن ....

[٤] ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

و هو يعبر عن ....

[٥] رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثي الصادي عند ....

= .... ألف جنيه

أحمد الشتوري

(٢) الشكل المقابل :
يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلو متر و الزمن بالساعة لحركة سيارة بين مدينتين ذهاباً و عودة
أكمل ما يلى :

[١] ﻡ = (.... ، ....) ،
ب = (.... ، ....) ،
حـ = (.... ، ....) ،
ء = (.... ، ....)

[٢] السرعة المنتظمة للسيارة خلال رحلة الذهاب = ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡ ب}}$
= $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ... كم / س

[٣] المسافة الكلية خلال رحلة العودة = ... كم

[٤] الزمن الكلى خلال رحلة العودة = ... ساعة

[٥] سرعة المتوسطة للسيارة خلال رحلة العودة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$
= $\frac{....}{....}$ = ... كم / س

[٦] القطعة المستقيمة الأفقية بالشكل تدل على ....

(٣) ملأ محمد خزان سيارته بالوقود الشكل المقابل يمثل العلاقة بين العلاقة بين الزمن بالساعة و كمية الوقود المتبقية باللتر
أكمل ما يلى :

[١] أكبر سعة للخزان = ... لتر

[٢] يفرغ الخزان بعد مرور .... ساعة

[٣] بعد مرور ١٥ ساعة يتبقى بالخزان .... لتر

[٤] يتبقى بالخزان ١٠ لتر بعد مرور .... ساعة

[٥] ﻡ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....)

[٦] ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡ ب}}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٧] معدل استهلاك الوقود فى الساعة الواحدة = ... لتر / ساعة

أحمد الشنتورى

(٤) تقرأ سهير كتاب ، و الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن بالساعة و عدد الصفحات المتبقية أكمل ما يلى :

[١] عدد صفحات الكتاب المتبقية عند بداية القراءة = ... صفحة

[٢] أ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....)

[٣] ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٤] معدل الصفحات المقروءة فى الساعة الواحدة = ... صفحة / ساعة و يعنى ....

[٥] تنهى سهير قراءة الكتاب بعد .... ساعات

(٥) أستأجر مزارع حفاراً ليستكمل حفر بئر و الشكل المقابل يوضح العلاقة بين عمق البئر بالمتر و الزمن بالساعة أكمل ما يلى :

[١] أ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....) ، حـ = (.... ، ....) ، ء = (.... ، ....)

[٢] عمق البئر قبل بدء عمل الحفار = ... متر

[٣] عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار = ... متر

[٣] الزمن الكلى الذى أستغرقه الحفار فى الحفر = ... ساعات

[٤] ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٨] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الخمس ساعات الأولى = ... متر / ساعة

[٦] ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٧] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعتين الأخيرتين = ... متر / ساعة

(٦) قرأ شخص جزءاً من كتاب عدد صفحاته ٦٠ صفحة فإذا كانت العلاقة التى تربط عدد الصفحات المتبقية (ص) ، و الزمن اللازم لقراءتها (ن) بالدقيقة تتعين بالعلاقة : ص = ٣٠ − $\frac{١}{٢}$ ن
أكمل ما يلى :

[١] عدد الصفحات التى سبق لهذا الشخص قراءتها = ... صفحة

[٢] الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات = ... دقيقة

الوحدة الثالثة الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات و تنظيمها

نعلم أن :

البيانات الإحصائية حول ظاهرة ما تنقسم إلى نوعين رئيسيين هما :

١) بيانات وصفية : هى بيانات تكتب فى صورة صفات مثل :
مكان الميلاد ، الحالة الاجتماعية ، اللون المفضل ، .... إلخ

٢) بيانات كمية : هى بيانات تكتب فى صورة أعداد مثل :
العمر ، الطول ، الوزن ، عدد الأبناء ، .... إلخ

جمع البيانات :

تجمع البيانات فى صورة :

١) بيانات ابتدائية : عن طريق استبيان أو كشوف ملاحظة

٢) بيانات ثانوية : عن طريق مصادر مثل النشرات أو الكتب أو الأنترنت أو الوثائق

٣) بيانات تجريبية : عن طريق التجارب لأختبار صحة نظرية ما

تنظيم و تحليل البيانات :

لعرض مجموعة من البيانات يلزم تنظيم عرضها بطريقة تساعد على الإلمام بها و الاستفادة منها لذا يتم ترتيب البيانات و تنظيمها فى جداول لتتضح طبيعتها و ليسهل استنتاج المعلومات و من هذه الجداول : الجداول التكرارية مثل :

الجدول التكرارى البسيط :

يستخدم لعرض الأعداد الصغيرة و البسيطة

تتضح خطوات تكوين جدول تكرارى بسيط من خلال المثال التالى :

أحمد الشنتورى

فى بداية العام الدراسى أستطلع معلم فصل به ٣٥ تلميذ بإحدى المدارس رأى متعلمى هذا الصف بالمدرسة عن الأنشطة المدرسية التى يفضلون الإنضمام إليها فكانت البيانات على النحو التالى :

رياضى	ثقافى	رياضى	اجتماعى	فنى	رياضى	اجتماعى
رياضى	اجتماعى	فنى	ثقافى	رياضى	اجتماعى	فنى
اجتماعى	فنى	رياضى	اجتماعى	رياضى	رياضى	اجتماعى
فنى	رياضى	رياضى	ثقافى	اجتماعى	فنى	رياضى
ثقافى	ثقافى	رياضى	فنى	رياضى	اجتماعى	فنى

لكى يتم حصر هذه البيانات أو تجميعها نستخدم جدول تفريغ بيانات تكرارى كالتالى :

النشاط	العلامات	التكرارات
رياضى	//// //// ///	١٣
اجتماعى	//// ////	٩
فنى	//// /	٨
ثقافى	////	٥
المجموع		٣٥

و باستبعاد عمود العلامات من جدول تفريغ البيانات التكرارى نحصل على (جدول التوزيع التكرارى البسيط) و هو كما يلى :

النشاط	رياضى	اجتماعى	فنى	ثقافى	المجموع
عدد التلاميذ	١٣	٩	٨	٥	٣٥

و لكن فى احيان كثيرة تكون البيانات الإحصائية أعداد كبيرة مثل أجور موظفى إحدى الوزارات ، و درجات طلاب شهادة الثانوية العامة لذلك فإن تبويب مثل هذه البيانات في جدول تكرارة بسيط يجعله كبيراً جداً و طويلاً و غير مجد لمعرفة و استنتاج أى معلومات لذلك نلجأ إلى الجدول التكرارى ذى المجموعات

تنظيم البيانات و عرضها فى جداول تكرارية :

تتضح خطوات تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات من خلال المثال التالى :

فيما يلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالباً فى إحدى الاختبارات

٣٠	١٥	٥	١٦	٢٢	١٠	١٩	٢٤	١٧	١٣
١٤	٢٣	١٨	٤	١٩	٢١	٩	١٩	٧	٢٠
٨	١٦	٢٠	٢١	١٤	١٣	٢٢	١٣	٢٠	١٦

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية :

١) تحديد أكبر قيمة و أصغر قيمة :

نجد : أكبر قيمة = ٢٤ ، و اصغر قيمة = ٢

أى : إذا أعتبرنا أن مجموعة هذه البيانات هى سـ

فإن : سـ = { سـ : ٢ ≤ سـ ≤ ٢٤ }

أى أن : قيم سـ تبدأ من ٢ و تنتهى عند ٢٤

و بالتالى فإن : المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ٢٤ – ٢ = ٢٢

٢) نجزئ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى و ليكن ٥ مجموعات

∴ مدى المجموعة = = $\frac{٢٢}{٥}$ = ٤ $\frac{٢}{٥}$ ≃ ٥

أى أن : كل مجموعة تحتوى على ٥ أعداد

٣) تصبح المجموعات الجزئية كما يلى :

المجموعة الأولى : تحتوى الدرجات من ٢ حتى أقل من ٧
و يعبر عنها : ٢ –

المجموعة الثانية : تحتوى الدرجات من ٧ حتى أقل من ١٢
و يعبر عنها : ٧ – ، .... و هكذا

٤) تفرغ البيانات فى جدول تفريغ بيانات تكرارى كما يلى :

المجموعات	العلامات	التكرار
٢ –	//	٢
٧ –	////	٤
١٢ –	~~////~~ ////	٩
١٧ –	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
٢٢ –	///	٣
	المجموع	٣٠

أحمد الشتوى

٥) و باستبعاد عمود العلامات من جدول تفريغ البيانات التكرارى نحصل على : (الجدول التكرارى ذى المجموعات) و هو كما يلى :

المجموعات	٢ –	٧ –	١٢ –	١٧ –	٢٢ –	المجموع
التكرار	٢	٤	٩	١٢	٣	٣٠

(١) البيانات التالية تبين أوزان ٤٠ طفل بالكيلو جرامات

٤٣	٣٣	٣١	١٥	٤٤	٢٤	٣٤	٣٩	٢٧	٣٨
٤٢	٢٥	٢٩	٢١	٢٩	٣٠	٣٣	٢٦	٣٣	٣٧
٤٠	٢٦	٣٢	٢١	٢٥	٣٠	٣٦	٣٢	٢٣	٣٦
٢٩	٣٥	٢٧	٣٤	٢٨	٢٢	٣١	١٩	٢٨	٣١

[١] أكمل :

١) أكبر قيمة = ... ٢) أصغر قيمة = ...

٣) المدى = ... − .... = ...

٤) ليكن عدد المجموعات = ٦ مجموعات

يكون : المدى = $\frac{....}{....}$ ≃ ....

[٢] كون جدول تفريغ بيانات تكرارى لهذه البيانات

المجموعات	العلامات	التكرار
١٥ –		
٢٠ –		
المجموع		

[٣] كون جدول تكرارى ذى مجموعات لهذه البيانات

المجموعات	١٥ –	٢٠ –					المجموع
التكرار							

[٤] عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن ٢٥ كجم = ... طفل

[٥] عدد الأطفال الذين أوزانهم ٢٥ كجم فأكثر = ... طفل

(٢) البيانات التالية تبين يبين عدد التلاميذ المترددين على مكتبة مشتركة فى مشروع (القراءة للجميع) خلال ٣٠ يوماً

٤٠	٤٦	٣٢	٣٦	٣٨	٣٠	٤٧	٣٨	٤٢	٣٣
٢٠	٣٤	٣٥	٤٨	٥٠	٢٧	٤٣	٢٧	٣٥	٣٤
٣٩	٢٤	٢٢	٤٢	٥٠	٤٤	٤٠	٣٨	٢٤	٢٨

[١] أكمل :

١) أكبر قيمة = ...

٢) أصغر قيمة = ...

٣) المدى = ... − .... = ...

[٢] كون جدول تكرارى ذى مجموعات لهذه البيانات بحيث تكون مجموعاته متساوية الطول و طول كل منها ٥ تلاميذ

المجموعات	العلامات	التكرار
٢٠ –		
٢٥ –		
المجموع		

المجموعات	٢٠ –	٢٥ –					المجموع
التكرار							

(٣) فيما يلى الأجر الأسبوعى لأربعين عاملاً فى أحد المصانع

٥٧	٨٩	٣٦	٩٤	٦٤	٥٤	٥٤	٧١	٦٢	٤٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٦	٦٩	٣٢
٩٩	٤٨	٦٧	٩٠	٥٥	٧٩	٩٦	٧٧	٦٠	٦٥
٥٩	٤٨	٩٤	٤٩	٣٨	٨٤	٧٨	٧٥	٩٥	٨١

كون جدول تكرارى ذى مجموعات متخذاً المجموعات الجزئية :
(٣٠ – ، ٤٠ – ، ٥٠ – ، .... ، ٩٠ –) ثم حدد المجموعة
التى بها أكبر تكرار ، و المجموعة التى بها أقل تكرار

أحمد الشتتورى

الدرس الثانى : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيلهما بيانياً

هناك تساؤلات تحتاج الإجابة عنها إلى تنظيم البيانات بشكل منظم تتيح دراستها بطريقة سهلة و ذلك بوضعها فى جدول يسمى الجدول التكرارى المتجمع و فيه تجمع البيانات على التوالى من أحد طرفى الجدول إلى الطرف الآخر حتى نحصل على التكرار الكلى
و هناك نوعان من الجدول التكرارى المتجمع هما :

أولاً : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و تمثيله بيانياً

فيه تجمع البيانات من جهة المجموعة الصغيرة إلى المجموعة الكبيرة كما بالمثال التالى :
الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	١٠	٦	٤٠

نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كما بالخطوات التالية :
(١) نكون جدول من عمودين
(٢) العمود الأول للحدود العليا للمجموعات و نكتب فيه المجموعات من أول مجموعة إلى آخر مجموعة و نكتب قبل كل مجموعة (أقل من)
(٣) العمود الثانى للتكرار المتجمع الصاعد و نبدأ بـ (صفر) أمام أول مجموعة ثم نجمع التكرارات بالتتابع حتى نصل إلى مجموع التكرارات أمام آخر مجموعة
فنحصل على :

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد				
أقل من ١٠					٠
أقل من ٢٠	٠	+	٤	=	٤
أقل من ٣٠	٤	+	٨	=	١٢
أقل من ٤٠	١٢	+	١٢	=	٢٤
أقل من ٥٠	٢٤	+	١٠	=	٣٤
أقل من ٦٠	٣٤	+	٦	=	٤٠

أى :

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ١٠	٠
أقل من ٢٠	٤
أقل من ٣٠	١٢
أقل من ٤٠	٢٤
أقل من ٥٠	٣٤
أقل من ٦٠	٤٠

أحمد الشتورى

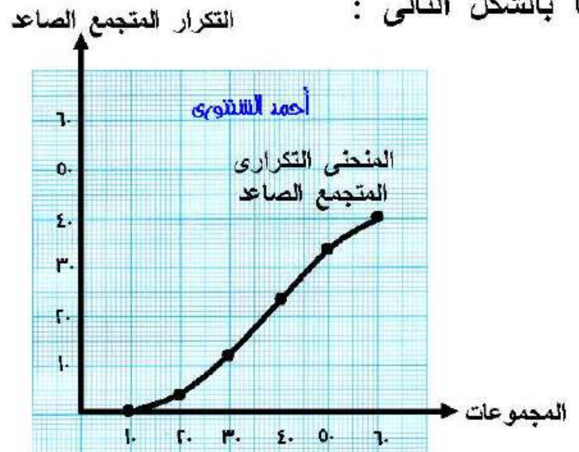
و لتمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية :

(١) نخصص المحور الأفقى للمجموعات و المحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد

(٢) نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور للتكرار الكلى المتجمع الصاعد

(٣) نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البيانى لها بالتتابع

كما بالشكل التالى :



و نلاحظ :

(١) لا يوجد تلاميذ تقل درجاتهم عن ١٠ درجات

(٢) عدد التلاميذ الذين تقل درجاتهم عن ٣٠ درجات = ١٢ تلميذاً

(٣) إذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ درجة فإن :

عدد التلاميذ الراسبين = ١٢ تلميذاً

ثانياً : الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيله بيانياً

فيه تجمع البيانات من جهة المجموعة الكبيرة إلى المجموعة اصغيرة كما بالمثال التالى :

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	١٠	٦	٤٠

نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كما بالخطوات التالية :

(١) نكون جدول من عمودين

(٢) العمود الأول للحدود السفلى للمجموعات و نكتب فيه المجموعات من أول مجموعة إلى آخر مجموعة و نكتب بعد كل مجموعة (فأكثر)

(٣) العمود الثانى للتكرار المتجمع النازل و نبدأ بـ (صفر) أمام آخر مجموعة ثم نجمع التكرارات بالتتابع حتى نصل إلى مجموع التكرارات أمام أول مجموعة فنحصل على :

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد				
١٠ فأكثر	٣٦	+	٤	=	٤٠
٢٠ فأكثر	٢٨	+	٨	=	٣٦
٣٠ فأكثر	١٦	+	١٢	=	٢٨
٤٠ فأكثر	٦	+	١٠	=	١٦
٥٠ فأكثر	٠	+	٦	=	٦
٦٠ فأكثر					٠

أحمد الشتورى

أى :

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٠ فأكثر	٤٠
٢٠ فأكثر	٣٦
٣٠ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	١٦
٥٠ فأكثر	٦
٦٠ فأكثر	٠

و لتمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية :

(١) نخصص المحور الأفقى للمجموعات و المحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد

(٢) نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور للتكرار الكلى المتجمع الصاعد

(٣) نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البيانى لها بالتتابع

كما بالشكل التالى :

و نلاحظ :

١) لا يوجد تلاميذ درجاتهم ٤٠ درجة فأكثر

٢) عدد التلاميذ الذين درجاتهم ٣٠ درجة فأكثر = ٢٨ تلميذاً

٣) إذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ درجة فإن :

عدد التلاميذ الناجحين = ٢٨ تلميذاً

(١) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لأعمار ٦٠ عامل فى إحد المصانع

المجموعات	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٩	٢٣	٥	٦٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ثم أوجد :

[١] عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ٤١ سنة = ...

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	....
أقل من ٣٠	....
أقل من ٣٥	....
أقل من ٤٠	....
أقل من ٤٥	....
أقل من ٥٠	....

(٢) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لعدد ١٠٠ مصنع حسب ساعات العمل الأسبوعية

المجموعات	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –	١٠٠ –	المجموع
التكرار	٥	١٦	٣٠	٢٢	١٥	١٢	١٠٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ثم أوجد :

[١] عدد المصانع التى تعمل أقل من ٧٥ ساعة فى الأسبوع = ...

[٢] النسبة المئوية لعدد المصانع التى تعمل أقل من ٧٥ ساعة فى الأسبوع = ...

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥٠	....
أقل من ٦٠	....
أقل من ٧٠	....
أقل من ٨٠	....
أقل من ٩٠	....
أقل من ١٠٠	....
أقل من ١١٠	....

أحمد الشتورى

(٣) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى عدد ساعات المذاكرة اليومية لتلاميذ فصل به ٥٠ تلميذ

المجموعات	١ –	٢ –	٣ –	٤ –	٥ –	٦ –	٧ –	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	١٢	١٥	٧	٦	٥٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل ثم أوجد :

[١] عدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يومياً = ...

[٢] النسبة المئوية لعدد لتلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يومياً = ...

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١ فأكثر	....
٢ فأكثر	....
٣ فأكثر	....
٤ فأكثر	....
٥ فأكثر	....
٦ فأكثر	....
٧ فأكثر	....
٨ فأكثر	....

(٤) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى أوزان ٦٠ شخصاً بالكيلو جرام

المجموعات	٥٥ –	٦٠ –	٦٥ –	٧٠ –	٧٥ –	٨٠ –	٨٥ –	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٨	س	٧	٣	٢	٦٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل ثم أوجد :

[١] س = ...

[٢] عدد الأشخاص الذين يزن كل منهم ٦٨ كجم فأكثر = ...

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
٥٥ فأكثر	....
٦٠ فأكثر	....
٦٥ فأكثر	....
٧٠ فأكثر	....
٧٥ فأكثر	....
٨٠ فأكثر	....
٨٥ فأكثر	....
٩٠ فأكثر	....

(٥) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى درجات ١٠٠٠ طالب فى إحدى المواد

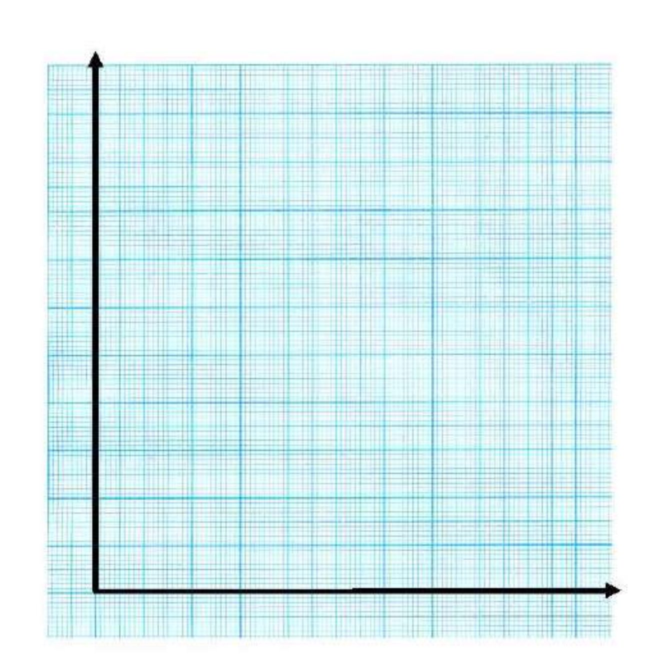
المجموعات	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –	المجموع
التكرار	٣٠	٧٠	١٦٠	٢٦٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٠	١٠٠٠

ارسم المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل فى نفس ورقة الرسم البيانى ثم أوجد :

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥ ٪

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥ ٪ فأكثر

جدول التكرار المتجمع الصاعد		جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ٢٠	....	٢٠ فأكثر	....
أقل من ٣٠	....	٣٠ فأكثر	....
أقل من ٤٠	....	٤٠ فأكثر	....
أقل من ٥٠	....	٥٠ فأكثر	....
أقل من ٦٠	....	٦٠ فأكثر	....
أقل من ٧٠	....	٧٠ فأكثر	....
أقل من ٨٠	....	٨٠ فأكثر	....
أقل من ٩٠	....	٩٠ فأكثر	....
أقل من ١٠٠	....	١٠٠ فأكثر	....



[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥ ٪ = ...

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥ ٪ فأكثر = ...

(٦) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى درجات ١٠٠ طالب فى إحدى المواد

المجموعات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

ارسم المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل فى نفس ورقة الرسم البيانى ثم أوجد :

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٠ فأكثر

[٣] النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة

[٤] النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على ٤٥ درجة فأكثر

جدول التكرار المتجمع الصاعد		جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ٠	....	٠ فأكثر	....
أقل من ١٠	....	١٠ فأكثر	....
أقل من ٢٠	....	٢٠ فأكثر	....
أقل من ٣٠	....	٣٠ فأكثر	....
أقل من ٤٠	....	٤٠ فأكثر	....
أقل من ٥٠	....	٥٠ فأكثر	....
أقل من ٦٠	....	٦٠ فأكثر	....

[١] عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة = ...

[٢] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٠ فأكثر = ...

[٣] النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة = ...

[٤] النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على ٤٥ درجة فأكثر = ...

الدرس الثالث : الوسط الحسابى – الوسيط – المنوال

بملاحظة التمثيلات البيانية لتوزيعات تكرارية نجد أن التكرارات تبدأ صغيرة ثم تتزايد حتى تصل إلى نهاية عظمى ثم تتناقص
و هذا يعنى أن عدداً كبيراً من التكرارات يتراكم عند قيمة متوسطة
و أن أغلب هذه التكرارات تتقرب من قيمة متوسطة
من هذه القيمة و التى تمثل مركز جذب لأغلب التكرارات و هذا السلوك فى أى توزيع تكرارى يسمى بالنزعة المركزية
و أى إحصائية لتوزيع تكرارى يعتمد أساساً على دراسة هذا السلوك و قياسه
و من مقاييس النزعة المركزية :
الوسط الحسابى (المتوسط) ، و الوسيط ، و المنوال

أولاً : الوسط الحسابى

نعلم أن :
الوسط الحسابى لمجموعة من القيم يتعين من العلاقة :

$$\text{الوسط الحسابى لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$$

فمثلاً :
الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٣ ، ٨ ، ١١ ، ٤ ، ٩

$$= \frac{٣ + ٨ + ١١ + ٤ + ٩}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

ملاحظة :
الوسط الحسابى × عدد القيم = مجموع القيم

فيكون : ٧ × ٥ = ٣ + ٨ + ١١ + ٤ + ٩
أى أن :

الوسط الحسابى :
هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هة نفس مجموع القيم الأصلية

(أ) أكمل ما يلى :

[١] الوسط الحسابى للقيم : ٧ ، ١١ ، ١٢ هو ....

[٢] الوسط الحسابى للقيم : ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ٥ هو ....

[٣] إذا كان : الوسط الحسابى للقيم : ٩ ، ٦ ، أ ، ٥ ، ٨ هو ٧
فإن : أ = ...

[٤] إذا كان : الوسط الحسابى للقيم : ١ ، ٦ ، ٥ أ ، ٤ ، ٤ هو ٧
فإن : أ = ...

[٥] إذا كان : الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، أ ، ٢ أ – ١
هو ١٨ فإن : أ = ...

[٦] إذا كان : مجموع خمسة أعداد يساوى ٣٠ فإن الوسط الحسابى لهذه الأعداد هو ....

إيجاد الوسط الحسابى لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات :

لإيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	١١	٢٠	٣١	٢٥	١٥	١٠٠

نتبع ما يلى :

١) نحدد مراكز المجموعات حيث :

مركز المجموعة = $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{٢}$ فيكون :

مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = ١٥

مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢}$ = ٢٥

و نظراً لأن : مدى المجموعات الجزئية متساو ،
و كل منها = ١٠
نعتبر الحد الأعلى للمجموعة الأخيرة = ١٠ فيكون :

مركزها = $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢}$ = ٥٥

٥) نكون الجدول الرأسى التالى :

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
١٠ –	١٥	١١	١٦٥
٢٠ –	٢٥	٢٠	٥٠٠
٣٠ –	٣٥	٣١	١٠٨٥
٤٠ –	٤٥	٢٥	١١٢٥
٥٠ –	٥٥	١٥	٨٢٥
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

٣) الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{٣٧٠٠}{١٠٠}$ = ٣٧

(٢) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	١٠	٢٢	٣٠	٢٥	١٣	١٠٠

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٥ –	....	....	....
١٥ –	....	....	....
٢٥ –	....	....	....
٣٥ –	....	....	....
٤٥ –	....	....	....
المجموع		١٠٠	....

الوسط الحسابى

= $\frac{....}{....}$

= ....

(٣) الجدول التالى يبين الأجر اليومى لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع حيث التوزيع التكارارى ذى مجموعات متساوية المدى :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	س –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٧	١٠	ك + ١	١٣	٨	٥٠

[١] أوجد قيمة كل من : س ، ك

س = ... ، ك = ...

[٢] أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٥ –	....	....	....
١٥ –	....	....	....
٢٥ –	....	....	....
.... –	....	....	....
٤٥ –	....	....	....
المجموع		٥٠	....

الوسط الحسابى = $\frac{....}{....}$ = ...

(٤) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلاً :

المجموعات	٦ –	١٠ –	١٤ –	١٨ –	٢٢ –	٢٦ –	٣٠ –	المجموع
التكرار	٢	٣	ك	٨	٦	٤	٢	٣٠

[١] ك = ...

[٢] عدد الأطفال الذين لا يقل وزنهم عن ٢٦ كجم = ...

[٣] أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٦ –	....	....	....
١٠ –	....	....	....
١٤ –	....	....	....
١٨ –	....	....	....
٢٢ –	....	....	....
٢٦ –	....	....	....
٣٠ –	....	....	....
المجموع		٣٠	....

الوسط الحسابى = $\frac{....}{....}$ = ...

ثانياً : الوسيط

هو القيمة التى تتوسط مجموعة المفردات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

تذكر : لإيجاد الوسيط لمجموعة من القيم نتبع التالى :

نرتب القيم تصاعدياً أو تنازلياً ثم :

١) إذا كان : عدد القيم فردياً

فإن الوسيط هو : القيمة التى تقع في الوسط تماماً

و يكون ترتيب الوسيط هو : $\frac{1}{2}$ (عدد القيم + ١)

٢) إذا كان : عدد القيم زوجياً

فإن الوسيط = $\frac{1}{2}$ (مجموع القيمتين اللتين تقعان في الوسط)

فمثلاً :

١) لإيجاد الوسيط لمجموعة القيم : ٦ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٥

نرتب القيم : ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

و بما أن : عدد القيم هو ٥ إذن ترتيب الوسيط هو : ٣

و يكون الوسيط = ٧

٢) الوسيط لمجموعة القيم : ٢ ، ٦ ، ١ ، ٨ ، ٤ ، ١٠

نرتب القيم : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

و بما أن : عدد القيم هو ٦

إذن الوسيط = $\frac{1}{2}$ (٤ + ٦) = ٥

(٥) أكمل ما يلى :

[١] الوسيط لمجموعة القيم : ٣ ، ٦ ، ٥ هو ....

[٢] الوسيط لمجموعة القيم : ٩ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ، ٧ ، ١١ هو ....

[٣] ترتيب الوسيط للقيم : ٥ ، ٧ ، ١ ، ٦ ، ٤ هو ....

[٤] إذا كان ترتيب الوسيط لعدد من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم هو ....

إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانياً :

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانياً نتبع ما يلى :

١) ننشأ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له

٢) نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

٣) نحدد نقطة مثل (م) على المحور الرأسى (التكرار) و التى تمثل ترتيب الوسيط

٤) نرسم مستقيماً أفقياً من نقطة (م) فيقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عموداً على المحور الأفقى ليقطعه فى نقطة تمثل الوسيط

فمثلاً :

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات نوجد الوسيط لهذا التوزيع التكرارى كما يلى :

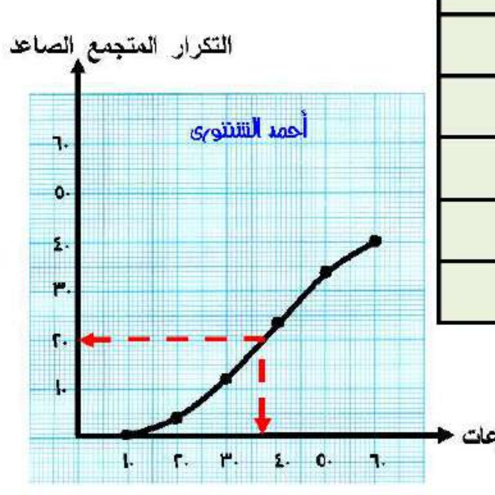
المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	١٠	٦	٤٠

١) ننشأ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

٢) نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠

٣) نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد
و من الرسم نوجد الوسيط

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٠	٠
أقل من ٢٠	٤
أقل من ٣٠	١٢
أقل من ٤٠	٢٤
أقل من ٥٠	٣٤
أقل من ٦٠	٤٠



من الرسم : الوسيط = ٣٠,٨

حل آخر :

١) ننشأ الجدول التكرارى المتجمع النازل

٢) نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠

٣) نرسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل
و من الرسم نوجد الوسيط

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٠ فأكثر	٤٠
٢٠ فأكثر	٣٦
٣٠ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	١٦
٥٠ فأكثر	٦
٦٠ فأكثر	٠

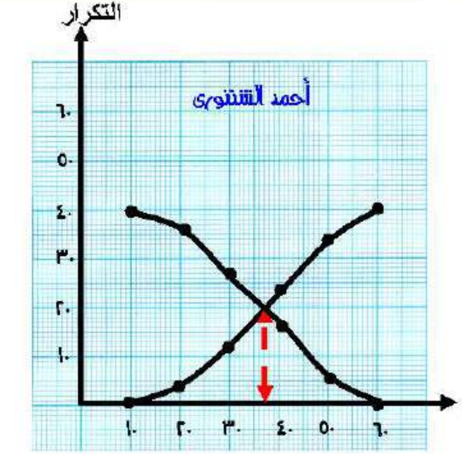
من الرسم : الوسيط = ٣٠,٨

حل ثالث :

نرسم كل من المنحنى المتجمع الصاعد و النازل فى نفس ورقة الرسم البيانى فيتقاطعا فى نقطة ، من هذه النقطة نرسم مستقيماً رأسياً يقطع المحور الأفقى فى نقطة تمثل الوسيط

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٠	٠
أقل من ٢٠	٤
أقل من ٣٠	١٢
أقل من ٤٠	٢٤
أقل من ٥٠	٣٤
أقل من ٦٠	٤٠

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٠ فأكثر	٤٠
٢٠ فأكثر	٣٦
٣٠ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	١٦
٥٠ فأكثر	٦
٦٠ فأكثر	٠



من الرسم : الوسيط = ٣٠,٨

أحمد الشتورى

(٦) أوجد من منحنى التكرار المتجمع الصاعد الوسيط للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٩	٢٣	٥	٦٠

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	....
أقل من ٣٠	....
أقل من ٣٥	....
أقل من ٤٠	....
أقل من ٤٥	....
أقل من ٥٠	....

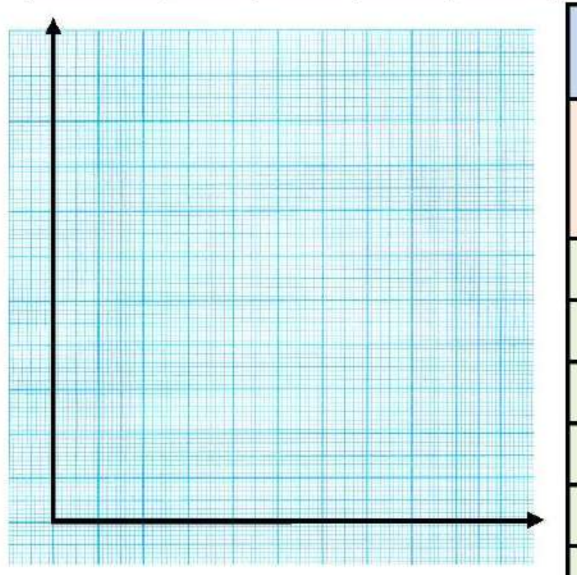
∵ ترتيب الوسيط = ...

∴ من الرسم : الوسيط = ...

(٧) أوجد من منحنى التكرار المتجمع النازل الوسيط للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	المجموع
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٥ فأكثر	....
٢٠ فأكثر	....
٢٥ فأكثر	....
٣٠ فأكثر	....
٣٥ فأكثر	....
٤٠ فأكثر	....
٤٥ فأكثر	....



∵ ترتيب الوسيط = ...

∴ من الرسم : الوسيط = ...

(٨) من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية المدى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	س –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

[١] أكمل : س = ... ، ك = ...

[٢] أوجد : الوسيط من المنحنيين المتجمعين الصاعد و النازل

جدول التكرار المتجمع الصاعد		جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ١٠	....	١٠ فأكثر	....
أقل من ٢٠	....	٢٠ فأكثر	....
أقل من	....	.... فأكثر	....
أقل من ٤٠	....	٤٠ فأكثر	....
أقل من ٥٠	....	٥٠ فأكثر	....
أقل من ٦٠	....	٦٠ فأكثر	....
أقل من ٧٠	....	٧٠ فأكثر	....

ثالثاً : المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هو :
القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) فى هذه القيم

فمثلاً :

المنوال لمجموعة القيم : ٥ ، ٨ ، ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٥
هو : ٥ لأن : ٥ القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً)

(٩) أكمل ما يلى :

[١] المنوال لمجموعة القيم : ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٩ هو ....

[٢] المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٤
هو ....

[٣] إذا كان : المنوال للقيم : ٥ ، ٧ ، م ، ١ + ١ ، ٦ ، ٤ هو ٤
فإن : م = ...

[٤] إذا كان : المنوال للقيم : ١٥ ، ٩ ، س + ٢ ، ٩ ، ١٥ هو ٩
فإن : س = ...

[٥] إذا كان : المنوال للقيم : ٦ ، ٨ ، س – ٢ ، ٦ ، ٥ هو ٦
فإن : س = ...

خطوات إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانياً :

تتضح خطوات إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات من خلال المثال التالى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	٦	١٠	١٤	١٢	٨	٥٠

[١] رسم المدرج التكرارى كما يلى :

١) نرسم محورين أحدهما أفقياً للمجموعات و الآخر رأسياً لتمثيل تكرار كل مجموعة

٢) نقسم المحور الأفقى لعدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات

٣) نقسم المحور الرأسى لعدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرار فى المجموعات

٤) نرسم مستطيلاً قاعدته هى المجموعة (١٠ –) و ارتفاعه يساوى التكرار (٦)

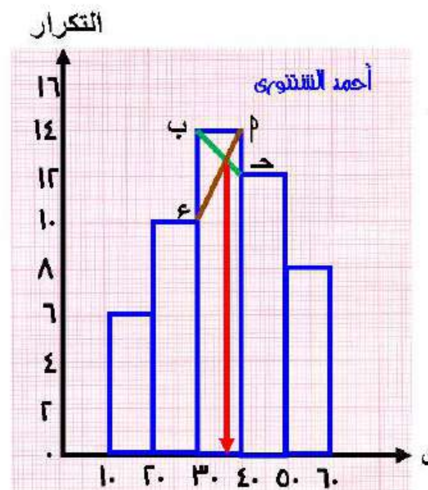
٥) نرسم مستطيلاً ثانياً ملاصقاً للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة (٢٠ –) و ارتفاعه يساوى التكرار (١٠)

٦) نكرر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٥٠ –)

[٢] إيجاد المنوال من المدرج التكرارى كما يلى :

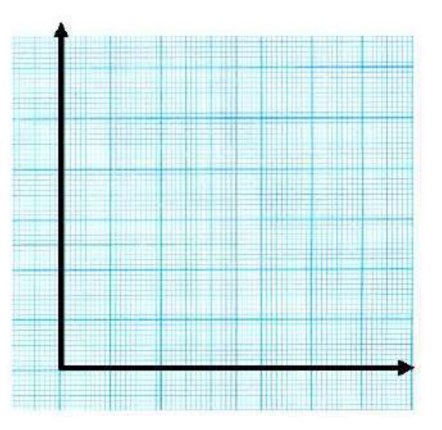
لإيجاد المنوال من المدرج التكرارى نلاحظ أن :
المجموعة الأكثر تكراراً هى المجموعة (٣٠ –) و تسمى المجموعة المنوالية

نحدد نقطة تقاطع $\overline{أء}$ ، $\overline{بحـ}$
كما بالشكل المقابل
و نسقط منها عموداً على المحور الأفقى يحدد القيمة المنوالية للتوزيع
من الرسم :
المنوال = ٣٨



(١٠) أوجد المنوال من التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	١٦	٢٤	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠

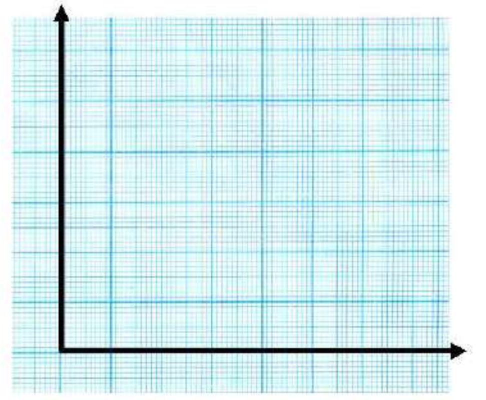


من الرسم :

المنوال = ...

(١١) أوجد المنوال من التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	٥٥ –	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	١٠	٨	٤	٥٠

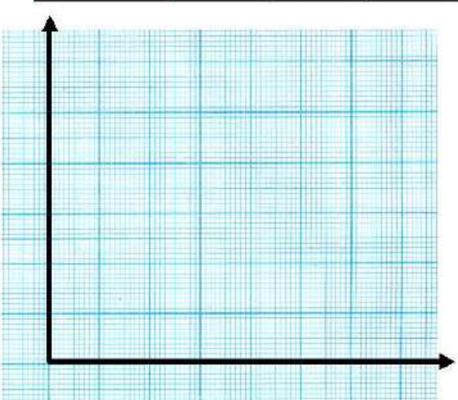


من الرسم :

المنوال = ...

(١٢) أوجد المنوال من التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	المجموع
التكرار	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠



من الرسم :

المنوال = ...

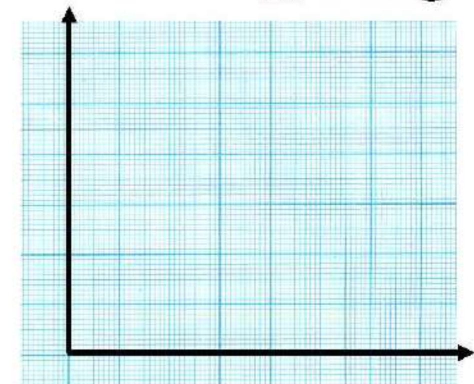
(١٣) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى ذى المجموعات متساوية المدى لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلو جرام بإحدى المدارس :

المجموعات	٣٠ –	٣٥ –	س –	٤٥ –	٥٠ –	٥٥ –	المجموع
التكرار	ك + ٤	٣ك	٤ك	٣ك + ١	٣ك – ١	ك + ١	٥٠

[١] أكمل : س = ... ، ك = ...

[٢] من الرسم أكمل :

المنوال = ...



(١٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الوسط الحسابى للقيم : ١٩ ، ٣٠ ، ٢٠ ، ٧ ، ٦ ، ٨ هو ....
(٦ ، ١٨ ، ٣٠ ، ٩٠)

[٢] إذا كان : الوسط الحسابى للقيم : ٣ – ك ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ + ٣ك هو ٧ فإن : ك = ...
(٥ ، ٧ ، ١٠ ، ٣٥)

[٣] إذا كان : الوسط الحسابى لستة قيم هو ١٢ فإن : مجموع هذه القيم = ...
(٧٢ ، ١٨ ، ٦ ، ٢)

[٤] المجموعة التى حدها الأدنى = ٢ ، حدها الأعلى = ٦ يكون مركزها هو ....
(٢ ، ٦ ، ٤ ، ٨)

[٥] الوسيط لمجموعة القيم : ١٥ ، ٢٢ ، ٩ ، ١١ ، ٢٣ هو ....
(٩ ، ١٥ ، ١٨ ، ٩٠)

[٦] ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ هو ....
(الثالث ، الرابع ، الخامس ، السادس)

[٧] إذا كان : ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن : عدد هذه القيم يساوى ....
(٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩)

[٨] إذا كان المنوال للقيم : ٣ ، ك ، ٥ ، ٤ هو ٣ فإن : فإن : ك = ...
(٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

(١٥) أكمل ما يلى :

[١] القيمة الأكثر تكراراً لمجموعة من القيم تسمى ....

[٢] نقطة تقاطع المنحنيين المتجمع الصاعد و النازل على المحور الأفقى تعين ....

[٣] المنوال لمجموعة القيم : ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥ ، ١١ هو ....

[٤] إذا كان : مجموع خمسة أعداد يساوى ٣٠ فإن : الوسط الحسابى لهذه الأعداد هو ....

الوحدة الرابعة   متوسطات المثلث و المثلث المتساوى الساقين

الدرس الأول : متوسطات المثلث

متوسط المثلث :

هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : ء منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

فإن : $\overline{\text{ب حـ}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

ملاحظة :

أى مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية (١) :

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، و منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

فإن : $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$

تتقاطع فى نقطة واحدة هى نقطة م

و تسمى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

نظرية (٢) :

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : م ء = $\frac{1}{2}$ أ م   أو   أ م = ٢ م ء

، م هـ = $\frac{1}{2}$ ب م   أو   ب م = ٢ م هـ

، م و = $\frac{1}{2}$ حـ م   أو   حـ م = ٢ م و

فمثلاً :

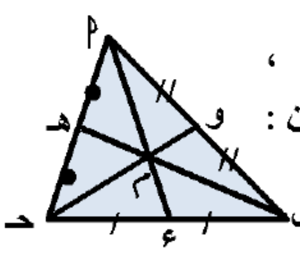
إذا كان : أ م = ٦ سم   فإن : م ء = $\frac{1}{2}$ أ م = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

، إذا كان : هـ م = ٤ سم   فإن : ب م = ٢ م هـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

ملاحظات :

١) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ،

م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ فإن :

أ م = $\frac{2}{3}$ أ ء   ،   م ء = $\frac{1}{3}$ أ ء

، أ ء = ٣ م ء   ،   أ ء = $\frac{3}{2}$ أ م

فمثلاً :

إذا كان : أ ء = ٩ سم فإن : م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

، أ ء = $\frac{٣}{٢}$ أ م = $\frac{٣}{٢}$ × ٩ = ٦ سم

و بالمثل : ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب هـ ، م هـ = $\frac{١}{٣}$ ب هـ

، ب هـ = ٣ م هـ ، ب هـ = $\frac{٣}{٢}$ ب م

، حـ م = $\frac{٢}{٣}$ حـ و ، م و = $\frac{١}{٣}$ حـ و

، حـ و = ٣ م و ، حـ و = $\frac{٣}{٢}$ حـ م

حقيقة :

النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هي نقطة تقاطع متوسطات هذا المثلث

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب حـ

، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث : م ء = $\frac{١}{٢}$ أ م فإن :

م تكون نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

(أ) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] في Δ أ ب حـ إذا كان : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ فإن : $\overline{\text{أ ء}}$ تسمى ....

(ارتفاع ، متوسط ، وتراً ، منصف للزاوية أ)

[٢] عدد متوسطات أي مثلث ....

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٣] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة .... من جهة الرأس

(١:٢ ، ٢:١ ، ٣:٢ ، ٣:١)

[٤] إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب حـ ، و كانت ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ فإن : أ ء = ...

(٢ أ م ، $\frac{٢}{٣}$ م ء ، $\frac{٣}{٢}$ أ م ، ٤ م ء)

[٥] إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب حـ ، و كان $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط طوله ٦ سم فإن : أ م = ... سم

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٦] إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب حـ ، و كان $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط ، أ م = ٦ سم فإن : م ء = ... سم

(٢ ، ٣ ، ١٢ ، ١٨)

[٧] مستطيل تقاطع قطراه في نقطة م ، طول قطره ٦ سم فإن : طول المتوسط $\overline{\text{أ م}}$ = ... سم

(٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ء ، هـ منتصفى أب ، أحـ

، ب هـ = ٩ سم ، حـ م = ٤ سم

، ب حـ = ٨ سم ، أكمل ما يلى :

[١] ب هـ ، حـ و .... فى Δ أ ب حـ

[٢] م نقطة تقاطع .... Δ أ ب حـ

[٣] م هـ = ... ب هـ = ... × .... = ... سم

[٤] م ء = ... م حـ = ... × .... = ... سم

[٥] ء هـ = ... ب حـ = ... × .... = ... سم

[٦] محيط Δ م ء هـ = ... + ... + ... = ... سم

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ء ، هـ منتصفى أب ، أحـ

، ب م = ٨ سم ، ء م = ٣ سم



، أ حـ = ٨ سم ، أكمل ما يلى :

[١] م هـ = ... ب م = ... × .... = ... سم

[٢] م حـ = ... م ء = ... × .... = ... سم

[٣] حـ هـ = ... أ حـ = ... × .... = ... سم

[٤] محيط Δ م حـ هـ = ... + ... + ... = ... سم

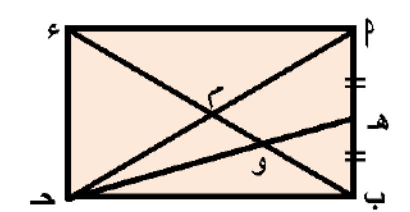
(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

أ هـ = هـ ب ، ب حـ = هـ ء = ١٢ سم

، أ م = ٩ سم أوجد محيط Δ أ ء و

(٥) فى الشكل المقابل :



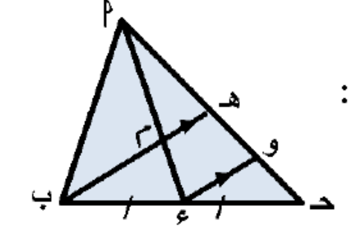
م ب حـ ء مستطيل فيه :

م هـ = هـ ب ، ب و = ٤ سم

أثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات

Δ م ب حـ ثم أوجد طول $\overline{\text{م م}}$

(٦) فى الشكل المقابل :



Δ م ب حـ فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث :

م م = ٢ م ء ، م هـ = ٤ سم ،

$\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ أوجد طول $\overline{\text{ء و}}$

أحمد الشتورى

نظرية (٣) :

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث

المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، ب ء متوسط

المطلوب : إثبات أن : ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

العمــل : نرسم ب ء ، نأخذ نقطة هـ ∈ ب ء بحيث : ب ء = ء هـ

البرهان : ∵ الشكل أ ب حـ هـ فيه أ حـ ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب حـ هـ متوازى أضلاع

∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ حـ

، ∵ ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء منتصف أ حـ

، و كان :

(١) أ حـ = ٨ سم فإن : ب ء = ٤ سم

(٢) ب ء = ٥ سم فإن : أ حـ = ١٠ سم

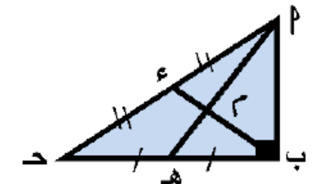


(٧) فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ء = ء حـ ، ب هـ = هـ حـ

فإذا كان : أ حـ = ١٢ سم

أوجد طول كل من : ب ء ، ب م



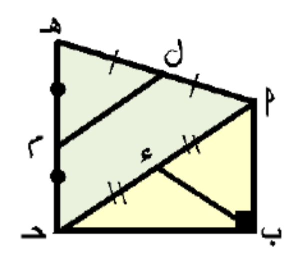
(٨) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ا ب حـ) = ٩٠° ، ا ء = ء حـ

، ا ل = ل هـ ، هـ م = م حـ

فإذا كان : ل م = ٤ سم

أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$



(٩) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ا ب حـ) = ٩٠° ، ا ء = ء حـ

، ا و = و هـ ، ا حـ = حـ هـ

أثبت أن : ب ء = ء و



عكس نظرية (٣) :

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة

المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط ، ء أ = ء ب = ء حـ

المطلوب : إثبات أن : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

العمـل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ، نأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ بحيث : ب ء = ء هـ

البرهان : ∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ ∴ ب هـ = أ حـ

، ∵ الشكل أ ب حـ هـ فيه $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متساويان فى الطول ، ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

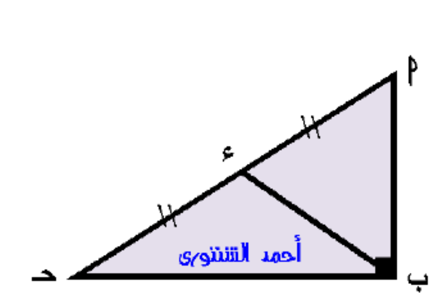
إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

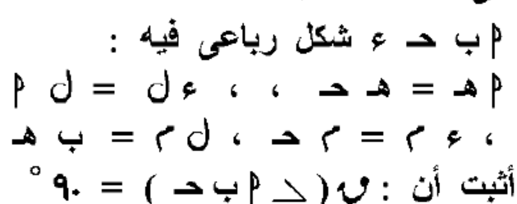
ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، و كان : أ حـ = ٨ سم ،

ب ء = ٤ سم أى أن : ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ

فإن : ∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°





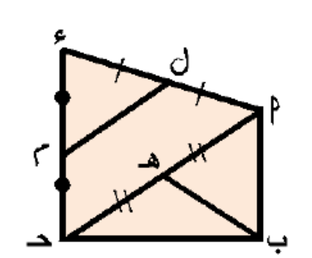
(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ هـ = هـ حـ ، ء ل = ل أ

، ء م = م حـ ، ل م = ب هـ

أثبت أن : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°



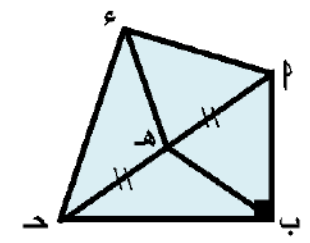
(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ هـ = هـ حـ

، ب هـ = هـ ء

أثبت أن : ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°





(١٢) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ،

أ هـ = هـ حـ ، ب هـ = هـ ء

أثبت أن : ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

نتيجة :

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ،

ق(∠ حـ) = ٣٠°

فإن : أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ

فمثلاً :

إذا كان : أ حـ = ٨ سم   فإن : ب ء = ٤ سم

(١٣) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق(∠ حـ) = ٣٠° ، أ ء = ء حـ

، أ حـ = ١٦ سم   أوجد محيط Δ أ ب ء



(١٤) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق(∠ حـ) = ٣٠° ، أ ء = ء حـ

، أ حـ = ١٢ سم ، م هـ = ٢,٥ سم

، ب هـ = هـ حـ ، أوجد محيط Δ أ ب م

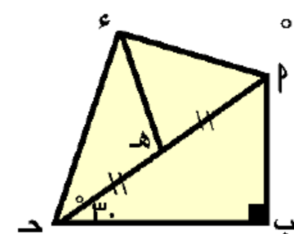
(١٥) في الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق(∠ حـ) = ٣٠°

، أ هـ = هـ حـ ، أ ب = ٦ سم

، ء هـ = ٦ سم أوجد طول أ حـ

ثم أثبت أن : ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°





(١٦) في الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

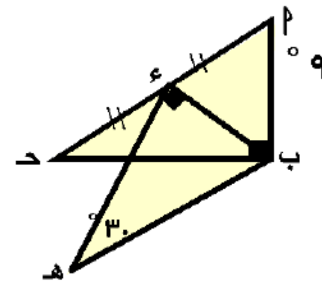
، ق(∠ حـ) = ٣٠° ، أ ء = ء حـ

، أ ب = ٨ سم ، ء هـ ⊥ ب حـ

أوجد طول كل من : ء ب ، ء هـ

(١٧) فى الشكل المقابل :

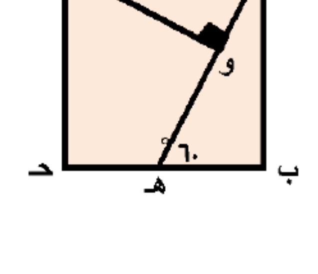
ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠° ، ق (∠ هـ) = ٣٠° ، أ ء = ء حـ ، ب هـ = ١٠ سم ، أوجد طول أحـ



(١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع فيه ، هـ ∈ ب حـ بحيث : ق (∠ أ هـ ب) = ٦٠° ، ء و ⊥ أ هـ ، أ و = ٤ سم

أوجد مساحة المربع أ ب حـ ء



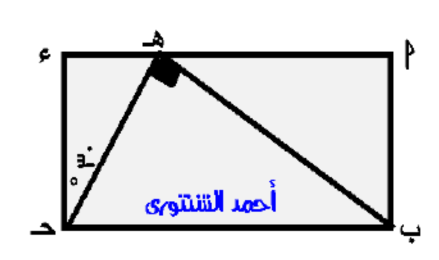
(١٩) فى الشكل المقابل :

ﺃ ب حـ ء مستطيل فيه هـ ∈ $\overline{\text{ﺃ ء}}$

بحيث : ق(∠ هـ حـ ء) = ٣٠°

، ق(∠ ب هـ حـ) = ٩٠°

أثبت أن : حـ هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ



(٢٠) أكمل ما يلى :

[١] طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية القائمة يساوى .... طول الوتر

[٢] طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر

[٣] إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون ....

[٤] فى Δ ﺃ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : ﺃ حـ = ٢٠ سم فإن : طول المتوسط المرسوم من ب يساوى .... سم

[٥] فى Δ ﺃ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : ﺃ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم فإن : طول المتوسط المرسوم من ب يساوى .... سم

[٦] فى Δ ﺃ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : طول المتوسط المرسوم من ب يساوى ٣ سم فإن : ﺃ حـ = ... سم

الدرس الثانى : المثلث المتساوى الساقين

نعلم أن :

المثلثات تصنف حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هى :

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)
أ ب ≠ ب حـ ≠ حـ أ	أ ب = أ حـ	أ ب = ب حـ = حـ أ

ملاحظة :

فى الشكل المقابل :

١) الضلعان : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ متطابقان (متساويان فى الطول)
لذلك يسمى المثلث أ ب حـ بالمثلث المتساوى الساقين

٢) تسمى النقطة أ رأس المثلث ، ∠ أ زاوية رأس المثلث

٣) تسمى $\overline{\text{ب حـ}}$ قاعدة المثلث ، و الزاويتين : ∠ ب ، ∠ حـ زاويتى قتعدة المثلث

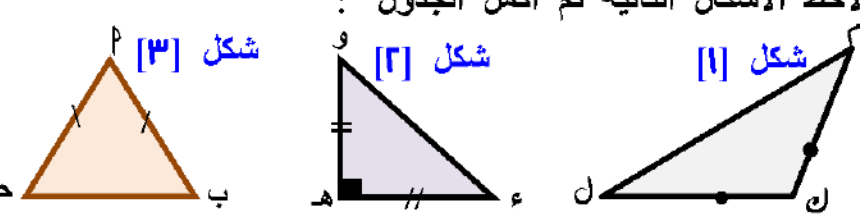
خواص المثلث المتساوى الساقين :

فى أى مثلث متساوى الساقين يكون :

[١] زاوية رأس المثلث قد تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

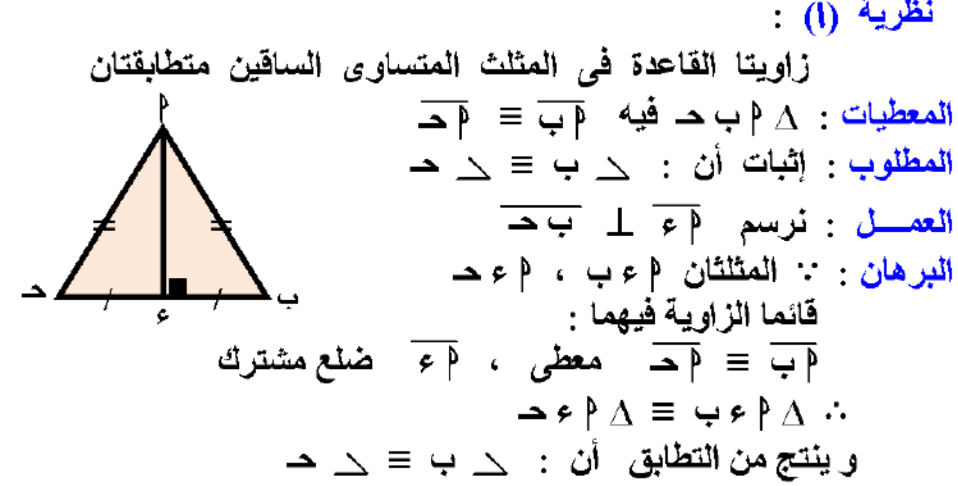
[٢] زاويتى قاعدة المثلث كل منهما حادة

(١) لاحظ الأشكال التالية ثم أكمل الجدول :

رقم الشكل	[١]	[٢]	[٣]
اسم المثلث			
القاعدة			
الساقان			
زاويتى القاعدة			
زاوية الرأس و نوعها			

الدرس الثالث : نظريات المثلث المتساوى الساقين



نظرية (١) :

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

المعطيات : Δ أ ب جـ فيه أب ≡ أجـ

المطلوب : إثبات أن : ∠ ب ≡ ∠ جـ

العمـل : نرسم أء ⊥ ب جـ

البرهان : ∵ المثلثان أ ء ب ، أ ء جـ قائما الزاوية فيهما :

أب ≡ أجـ معطى ، أء ضلع مشترك

∴ Δ أ ء ب ≡ Δ أ ء جـ

و ينتج من التطابق أن : ∠ ب ≡ ∠ جـ

(١) فى كل شكل من الأشكال التالية أوجد قيم الرموز المستخدمة فى قياسات الزوايا :

[١]	[٢]
س ، ٥٥° ، ص	س ، ص ، ٤٨°
س = ... ° ، ص = ... °	س = ... ° ، ص = ... °

[٣]	[٤]
٦٥° ، س ، ص	ص ، ع ، س ، ٣٢°
س = ... ° ، ص = ... °	س = ... ° ، ص = ... ° ، ع = ... °

[٥]	[٦]
٢س ، س + ٤٠ ، ٣س − ١٠	٢س + ١٢ ، ٣س + ٩
س = ... °	س = ... °

[٧]	[٨]
٣س − ١٧ ، ٢س + ١٣	٥٧° ، س ، ص
س = ... °	س = ... ° ، ص = ... °

نتيجة :

إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة

و يكون قياس كل منها ٦٠°

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ﺃ ب حـ فيه :

ﺃ ب = ب حـ = حـ ﺃ فإن :

ق(∠ ﺃ) = ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) = ٦٠°

(٢) فى الشكل المقابل :

ﺃ ب = ب حـ = حـ ﺃ ، ﺃ حـ = ﺃ ء

ق(∠ ء) = ٧٠° أوجد :

ق(∠ ب حـ ء) ، ق(∠ ب ﺃ ء)

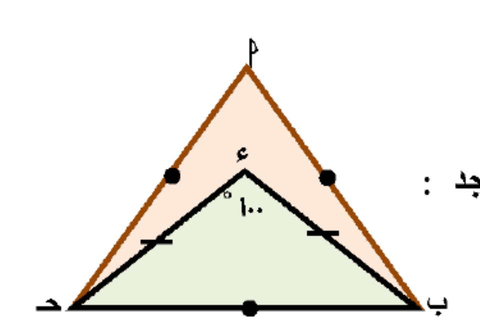
(٣) فى الشكل المقابل :

ﺃ ب = ب حـ = حـ ﺃ ،

ء ب = ء حـ ،

ق(∠ ب ء حـ) = ١٠٠° أوجد :

ق(∠ ﺃ ب ء)



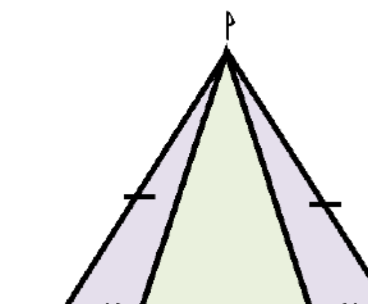
أحمد الشنتورى

(٤) فى الشكل المقابل :

م ب = م حـ ، ء ب = هـ حـ ،

أثبت أن : م ء = م هـ

ق(∠ م هـ ء) = ق(∠ م ء هـ)





(٥) فى الشكل المقابل :

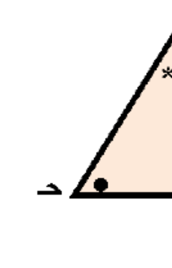
م ب حـ ء متوازى أضلاع ،

م ب = ء هـ ، ق(∠ ء هـ حـ) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ م)

نظرية (٢) :

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، و يكون المثلث متساوى الساقين



المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ∠ ب ≡ ∠ حـ

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ حـ}}$

العمـــل : ننصف ∠ ب أ حـ بالمنصف $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ يقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء

البرهان : ∵ ∠ ب ≡ ∠ حـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ حـ أ ء)

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ المثلثان أ ء ب ، أ ء حـ فيهما :

$\overline{\text{أ ء}}$ ضلع مشترك

ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ حـ أ ء)

ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ء حـ)

∴ Δ أ ء ب ≡ Δ أ ء حـ

و ينتج من التطابق أن : $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ حـ}}$

و يكون : Δ أ ب حـ متساوى الساقين

نتيجة :

إذا تطابق زواياه مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

∠ أ ≡ ∠ ب ≡ ∠ حـ فإن :

أ ب = ب حـ = حـ أ

أى أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

ملاحظة :

المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع

فمثلاً :

١) إذا كان : Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، ق(∠ أ) = ٦٠°

فإن : ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

= ½ × (١٨٠° − ٦٠°) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

٢) إذا كان : Δ س ص ع فيه : س ص = س ع ،

ق(∠ س) = ٦٠° فإن : ق(∠ ع) = ٦٠°

، ق(∠ ص) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∴ Δ س ص ع متساوى الأضلاع

(٦) فى كل شكل من الأشكال التالية أكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول :

[١]	[٢]
.... = ...	.... = ...
[٣]	**[٤]**
.... = ...	.... = ...

(٧) Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ حـ) = ٧٢°

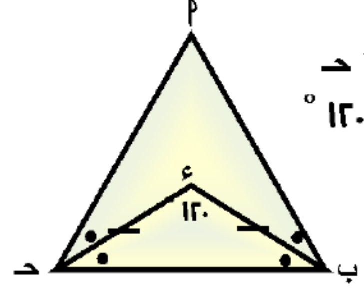
أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين

(٨) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ ب ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ

، ب ء = ء حـ ، ق(∠ ب ء حـ) = ١٢٠°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

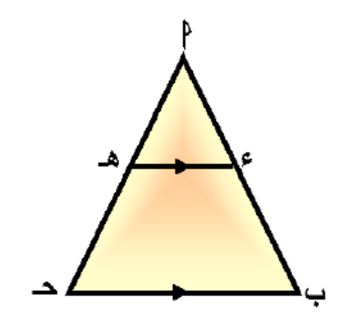


(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب حـ // ء هـ

أثبت أن : ∆ أ ء هـ متساوى الساقين

ثم أثبت أن : ب ء = حـ هـ



(١٠) فى الشكل المقابل :

ب ء ينصف ∠ أ ب حـ ،

ب حـ // ء هـ

أثبت أن : ∆ ب ء هـ متساوى الساقين

(١١) أكمل ما يلى :

[١] فى ∆ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٦٥° ، ق(∠ ب) = ٥٠° فإن : أ ب = ...

[٢] فى ∆ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق(∠ أ) = ٨٠° فإن : ق(∠ حـ) = ...°

[٣] إذا كان : ∆ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، و كان : أ ب = ب حـ فإن : ق(∠ أ) = ...°

[٤] إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى مثلث متساوى الساقين ٤٨° فإن قياس زاوية رأس المثلث يساوى ....°

[٥] إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٧٤° فإن قياس زاوية القاعدة يساوى ....°

[٦] فى ∆ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق(∠ أ) = ٦٠° ، و محيطه = ١٥ سم فإن : ب حـ = ... سم

[٧] قياس أى زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع = ...°

[٨] قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...°

[٩] إذا قياس إحدى زاويتى قاعدة مثلث متساوى الساقين ٤٥° كان المثلث ....

(١٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ٣٠° كان المثلث ....

(منفرج الزوية ، حاد الزوايا ، قائم الزاوية ، متساوى الأضلاع)

[٢] فى ∆ س ص ع إذا كان : س ص = ص ع = س ع فإن : ق(∠ س) = ...°

(٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠)

[٣] فى ∆ أ ب حـ المتساوى الساقين إذا كان : $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{أحـ}}$ فإن : ق(∠ ب) = ...°

(٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠)

[٤] مجموع قياسي زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

(٣٠ ، ٦٠ ، ٩٠ ، ١٢٠)

[٥] فى ∆ س ص ع إذا كان : س ص = س ع فإن : الزاوية الخارجة عند الرأس ع تكون ....

(حادة ، قائمة ، منفرجة ، منعكسة)

[٦] إذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٧٠° ، ٤٠° كان المثلث ....

(مختلف الأضلاع ، متساوى الأضلاع ، متساوى الساقين ، قائم الزاوية و متساوى الساقين)

الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١) :

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ﻫ ب حـ فيه :

ﻫ ب = ﻫ حـ ، $\overline{ﻫ ء}$ متوسط فإن :

(١) $\overrightarrow{ﻫ ء}$ ينصف ∠ ب ﻫ حـ

أى أن : ق (∠ ب ﻫ ء) = ق (∠ حـ ﻫ ء)

(٢) $\overline{ﻫ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

ملاحظة :

Δ ب ﻫ ء ≡ Δ حـ ﻫ ء لأن : $\overline{ﻫ ء}$ ضلع مشترك ،

ﻫ ب = ﻫ حـ ، ب ء = حـ ء

نتيجة (٢) :

منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ﻫ ب حـ فيه :

ﻫ ب = ﻫ حـ ، $\overrightarrow{ﻫ ء}$ ينصف ∠ ب ﻫ حـ فإن :

(١) ء منتصف $\overline{ب حـ}$ أى أن : ب ء = ء حـ

(٢) $\overline{ﻫ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

ملاحظة :

Δ ب ﻫ ء ≡ Δ حـ ﻫ ء لأن : $\overline{ﻫ ء}$ ضلع مشترك ،

ﻫ ب = ﻫ حـ ، ق (∠ ب ﻫ ء) = ق (∠ حـ ﻫ ء)

نتيجة (٣) :

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ﻫ ب حـ فيه :

ﻫ ب = ﻫ حـ ، $\overline{ﻫ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ فإن :

(١) ء منتصف $\overline{ب حـ}$

أى أن : ب ء = ء حـ

(٢) ق (∠ ب ﻫ ء) = ق (∠ حـ ﻫ ء)



ملاحظة :

Δ ب ﻫ ء ≡ Δ حـ ﻫ ء لأن : $\overline{ﻫ ء}$ ضلع مشترك ،

ﻫ ب = ﻫ حـ ، ق (∠ ﻫ ء ب) = ق (∠ ﻫ ء حـ) = ٩٠°

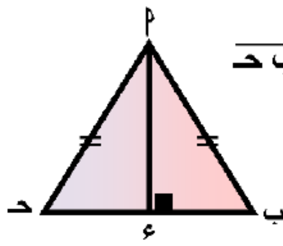
(١) فى الشكل المقابل :

Δ ﻫ ب حـ فيه : ﻫ ب = ﻫ حـ ، $\overline{ﻫ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

، ق (∠ ب ﻫ ء) = ٣٢°

، ب حـ = ٦ سم أوجد :

ق (∠ ب ﻫ حـ) ، طول $\overline{ب ء}$



(٢) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ب حـ

، ب ء ⊥ أ حـ ، أ ء = ٤ سم أوجد :

طول أ حـ ، ق (∠ ء ب حـ)

ثم أستنتج أن : Δ ب ء حـ متساوى الساقين



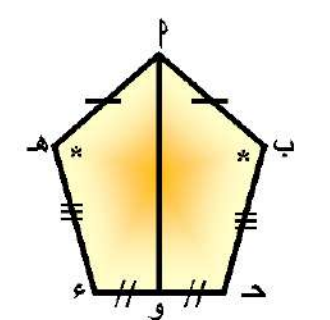
(٣) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ هـ ، ب حـ = هـ ء ،

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ هـ ء)

، حـ و = و ء برهن أن :

أ و ⊥ حـ ء



محاور التماثل :

أولاً : محاور تماثل للمثلث المتساوى الساقين :

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب جـ فيه :

أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإن :

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ هو محور تماثل للمثلث أ ب جـ المتساوى الساقين

ملاحظات :

١) المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط

٢) المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل

٣) المثلث المختلف الأضلاع له محاور تماثل

ثانياً : محاور تماثل القطعة المستقيمة :

يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة

و للاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة

ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

المستقيم ل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : ء ∈ ل

فإن : المستقيم ل هو محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$

خاصية :

أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : المستقيم ل محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$

فإن :

١) إذا كان : جـ ∈ ل فإن :

أ جـ = ب جـ

٢) إذا كان : أ هـ = هـ ب فإن :

هـ ∈ ل لأن : عكس الخاصية صحيح

فإذا كانت هناك نقطة على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة

(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ = ١٣ سم ، هـ ب = هـ جـ ،

$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = { ء } ، ب جـ = ١٠ سم

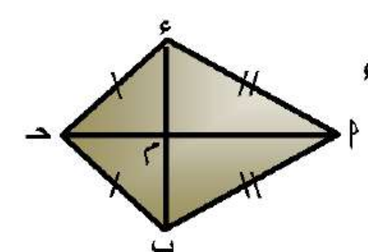
اوجد طول كل من : $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

(٥) في الشكل المقابل :

$\overline{بء} \cap \overline{اح} = \{م\}$ ، اب = اء

، ب ح = ء ح أثبت أن :

م منتصف $\overline{بء}$

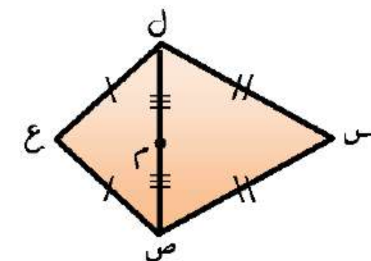


(٦) في الشكل المقابل :

س ص = س ل ، ع ص = ع ل

، ل م = ص م أثبت أن :

س ، م ، ع على استقامة واحدة



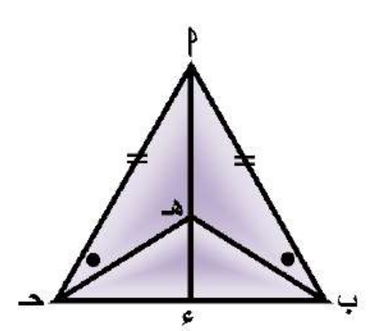
أحمد الشتوى

(٧) في الشكل المقابل :

Δ ا ب ح فيه : ا ب = ا ح ،

ق (∠ ا ب ء) = ق (∠ ا ح ء)

أثبت أن : $\overleftrightarrow{اهـ}$ محور $\overline{ب ح}$

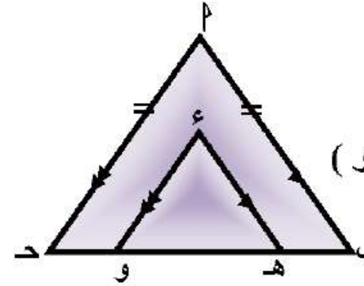


(٨) في الشكل المقابل :

ا ب = ا ح ، $\overline{ءهـ}$ // $\overline{اب}$ ،

$\overline{ءو}$ // $\overline{اح}$ أثبت أن : ءهـ = ءو

، ق (∠ ب ا ح) = ق (∠ هـ ء و)



(٩) أكمل ما يلى :

[١] المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة يسمى ....

[٢] المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى ....

[٣] أى نقطة تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها

[٤] فى Δ ا ب حـ إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق(∠ ا) = ٦٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

[٥] فى Δ ا ب حـ إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق(∠ ب) = ٥٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

[٦] إذا كان Δ ا ب حـ له محور تماثل واحد و فيه : ق(∠ ا ب حـ) = ١٢٠° فإن : ق(∠ ا) = ...°

[٧] العمود الساقط من رأس المثلث المتساوى الساقين على القاعدة ينصف كلاً من .... ، ....

[٨] الشعاع المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف .... و يكون ....

(١٠) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان طول أى ضلع فى مثلث = $\frac{١}{٣}$ محيط المثلث فإن : عدد محاور تماثل المثلث = ...

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٢] فى المعين س ص ع ل يكون : $\overline{\text{س ع}}$ محور تماثل هو ....

($\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$)

[٣] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هو محور تماثل $\overline{\text{ا ب}}$ فإن : ....

(ا س = ب ص ، ا س = ب س ، ب ص = س ص ، ا ص = ب س)

[٤] إذا كان : ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ا ء ، ب حـ = ء حـ فإن : $\overleftrightarrow{\text{ا حـ}}$ .... $\overline{\text{ب ء}}$

(يوازى ، عمودى على ، محور تماثل ، يطابق)

[٥] إذا كان : Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ ا) = ٥٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٦] إذا كان : Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ ا) = ٤٥° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٧] المستقيم العمودى على القكعة المستقيمة من منتصفها يسمى .... لها

(موازى ، منصف ، متوسط ، محور تماثل)

الوحدة الخامسة   التباين

الدرس الأول : التباين

مفهوم التباين :

نعلم أن :

علاقة التباين هى العلاقة التى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين و نعبر عنها بإحدى العلامتين : > (أكبر من) ، (أصغر من) و تسمى كل منهما متباينة أو علاقة تباين
و لما كانت أطوال القطع المستقيمة و كذلك قياسات الزوايا عبارة عن أعداد لذا تستخدم علاقة التباين للمقارنة بين طولى قطعتين مستقيمتين أو قياسى زاويتين

فمثلاً :

١) إذا كان : أ ب = ٦ سم ، حـ ء = ٤ سم فإن :
أ ب > حـ ء   أو   حـ ء < أ ب

٢) إذا كان : ق(∠ أ) = ٦٠° ، ق(∠ ب) = ٤٢° فإن :
∠ أ > ∠ ب   أو   ∠ ب < ∠ أ

(١) أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :

[١] إذا كانت ∠ أ حادة فإن : ق(∠ أ) .... ٩٠°

[٢] إذا كانت ∠ ب منفرجة فإن : ق(∠ ب) .... ٩٠°

[٣] إذا كان : س ص = ٣ سم ، ل ع = ٥ سم
فإن : ل ع .... س ص

(٢) فى الشكل المقابل :

[١] أكمل :

١) ق(∠ أ ء ب) = ... °

٢) ق(∠ أ حـ هـ) = ... °

أ ، ب ، ء ، حـ ، هـ ، ٤٥° ، ١٥° ، ٧٠°

[٢] أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :

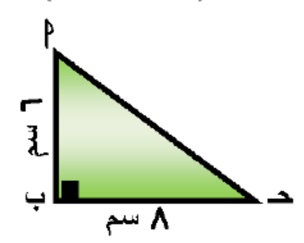
١) ق(∠ أ حـ هـ) = ... ق(∠ ء أ حـ)

٢) ق(∠ أ حـ ء) = ... ق(∠ أ ء ب)

٣) ق(∠ أ ء حـ) = ... ق(∠ أ ب ء)

٤) ق(∠ أ ء حـ) = ... ق(∠ أ حـ هـ)

(٣) فى الشكل المقابل أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :



[١] أ ب .... ب حـ

[٢] أ حـ .... ب حـ

[٣] أ حـ .... أ ب

[٤] ق(∠ أ) .... ق(∠ ب)

[٥] ق(∠ حـ) .... ق(∠ ب)

مسلمات التباين :

لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع :

١] إذا كان : س > ص فإن : س + ع > ص + ع

٢] إذا كان : س > ص فإن : س − ع > ص − ع

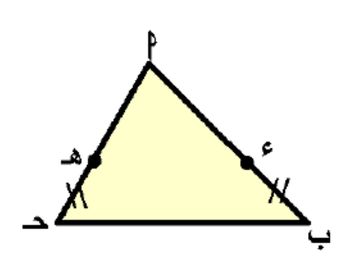
٣] إذا كان : س > ص ، ع عدداً موجباً
فإن : س ع > ص ع

٤] إذا كان : س > ص ، ص > ع فإن : س > ع

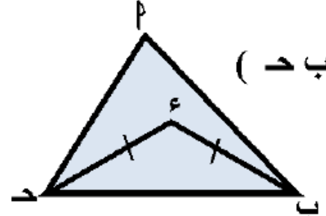
٥] إذا كان : س > ص ، أ > ب
فإن : س + أ > ص + ب

(٤) فى الشكل المقابل :
إذا كان : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$
، كان : أ ب > حـ ء
أثبت أن : أ حـ > ب ء

(٥) فى الشكل المقابل :
Δ أ ب حـ فيه : أ ب > أ حـ ،
ب ء = حـ هـ أثبت أن :
أ ء > أ هـ



(٦) فى الشكل المقابل :
إذا كان : ق(∠ أ حـ ب) > ق(∠ أ ب حـ)
، ء ب = ء حـ أثبت أن :
ق(∠ أ حـ ء) > ق(∠ أ ب ء)

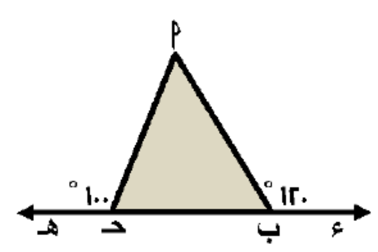


(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ أ ب ء) = ١٢٠°

، ق(∠ أ حـ هـ) = ١٠٠°

رتب قياسات زوايا Δ أ ب حـ تصاعدياً



(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، ء و > ب هـ

أثبت أن : أ و + أ ب > حـ هـ + حـ ء

(٩) أكمل ما يلى :

[١] إذا كان : أ ، ب ، حـ أعداد موجبة ، و كان : أ > ب

فإن : أ + حـ .... ب + حـ

[٢] إذا كان : أ ، ب ، حـ أعداد موجبة ، و كان : أ > ب

، ب > حـ فإن : أ .... حـ

[٣] إذا كان : ق(∠ أ) > ق(∠ ب) فإن :

مكملة ∠ أ .... مكملة ∠ ب

[٤] إذا كانت النقط : أ ، ب ، حـ ، ء على استقامة واحدة ، و كان

أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٤ سم

فإن : أ حـ .... ب ء

[٥] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ فإن :

ق(∠ ب أ ء) .... ق(∠ ب أ حـ)

الدرس الثانى : المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

نعلم أن :

إذا تطابق ضلعان فى مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متساويتين فى القياس

فإذا كان : Δ ا ب حـ فيه :

ا ب = ا حـ فإن : ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

ملاحظة :

إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع

نظرية :

إذا أختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر

المعطيات : Δ ا ب حـ فيه : ا ب > ا حـ

المطلوب : إثبات أن :

ق(∠ ا حـ ب) > ق(∠ ا ب حـ)

العمـــل : نأخذ ء ∈ ا ب حيث : ا ء = ا حـ

البرهان : ∵ Δ ا حـ ء فيه : ا ء = ا حـ

∴ ق(∠ ا حـ ء) = ق(∠ ا ء حـ) (١)

، ∵ ∠ ا ء حـ خارجة عن Δ ب حـ ء

∴ ق(∠ ا ء حـ) > ق(∠ ب) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ق(∠ ا حـ ء) > ق(∠ ب)

، ∵ ق(∠ ا حـ ب) > ق(∠ ا حـ ء)

∴ ق(∠ ا حـ ب) > ق(∠ ا ب حـ)

ملاحظات :

١) أكبر زوايا المثلث فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً و يكون قياسها أكبر من ٦٠°

٢) أصغر زوايا المثلث فى القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً. و يكون قياسها أقل من ٦٠°

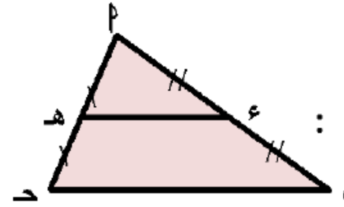
(ا) فى الشكل المقابل :

Δ ا ب حـ فيه : ا ب > ب حـ > حـ ا

أثبت أن :

ق(∠ حـ) > ق(∠ ا) > ق(∠ ب)

(٢) فى الشكل المقابل :



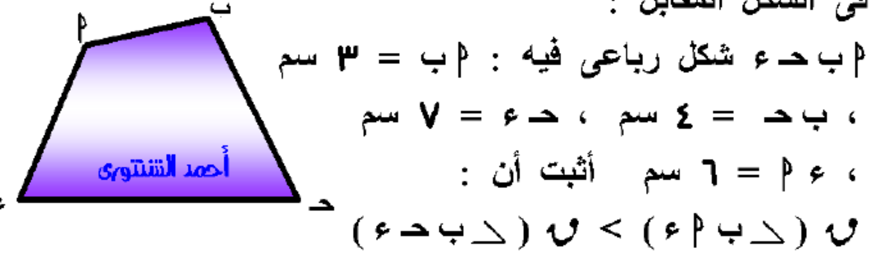
Δ أ ب حـ فيه : أ ب < أ حـ ،

ء أ = ء ب ، أ هـ = هـ حـ أثبت أن :

ق (∠ أ هـ ء) < ق (∠ أ ء هـ)



(٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٣ سم

، ب حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٧ سم

، ء أ = ٦ سم أثبت أن :

ق (∠ ب أ ء) < ق (∠ ب حـ ء)

(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء

، ء حـ > ب حـ : أثبت أن :

ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ ء حـ)

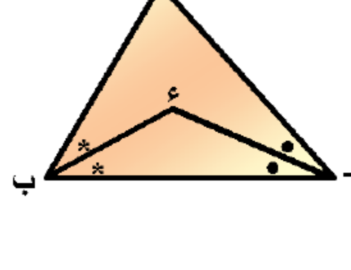
(5) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء ب ينصف ∠ أ ب حـ

، ء حـ ينصف ∠ أ حـ ب فإذا كان :

ء حـ > ء ب أثبت أن :

ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ ء حـ)



(٦) فى الشكل المقابل :

∆ أ ب حـ فيه : أء ، ب هـ متوسطان تقاطعا فى نقطة م فإذا كان : م ء > م هـ

أثبت أن :

ق (∠ م أ ب) > ق (∠ م ب أ)

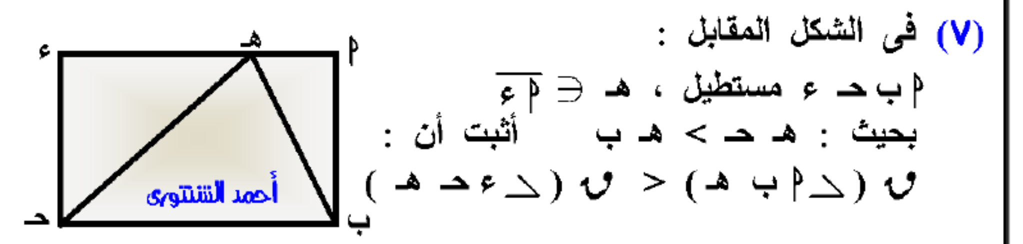


(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ أء

بحيث : هـ حـ > هـ ب أثبت أن :

ق (∠ أ ب هـ) > ق (∠ ء حـ هـ)



(٨) فى الشكل المقابل :

Δ ﺃ ب ﺣ متساوى الأضلاع ، ء نقطة داخله

، ق (∠ ء ﺣ ب) > ق (∠ ء ب ﺣ)

أثبت أن :

ق (∠ ﺃ ب ء) > ق (∠ ﺃ ﺣ ء)

، ق (∠ ب ﺃ ﺣ) > ق (∠ ﺃ ب ء)

> ق (∠ ﺃ ﺣ ء)

(٩) أكمل ما يلى :

[١] أصغر زوايا المثلث فى القياس تقابل .... الأضلاع طولاً

[٢] إذا أختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية .... فى القياس من قياس الزاوية التى تقابل الضلع الآخر

[٣] قياس أكبر زاوية فى المثلث > .... °

[٤] قياس أصغر زاوية فى المثلث .... ٦٠°

[٥] فى Δ ﺃ ب ﺣ إذا كان : ﺃ ب < ﺃ ﺣ < ب ﺣ فإن :

ق (∠ ....) < ق (∠ ....) < ق (∠ ....)

(١٠) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى Δ ﺃ ب ﺣ إذا كان : ﺃ ب > ب ﺣ فإن :

ق (∠ ﺃ) .... ق (∠ ﺣ) 　　(< ، > ، = ، ≡)

[٢] فى Δ ﺃ ب ﺣ إذا كان : ﺃ ب = ٣ سم ، ب ﺣ = ٤ سم ، ﺃ ﺣ = ٥ سم فإن : ....

(ق (∠ ب) > ق (∠ ﺃ) ، ق (∠ ﺃ) > ق (∠ ب) ،

ق (∠ ﺣ) > ق (∠ ﺃ) ، ق (∠ ﺃ) = ق (∠ ﺣ))

[٣] فى Δ س ص ع المنفرج الزاوية فى س ، $\overline{س ء} \perp \overline{ص ع}$

فإن : ق (∠ ص) .... ق (∠ ص ء س)

(< ، > ، = ، ≡)

الدرس الثالث : المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

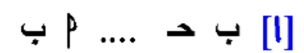
نعلم أن :
إذا تساوى قياسا زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويين يكونان متساويتين فى الطول
فإذا كان : Δ أ ب حـ فيه :
ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) فإن : أ ب = أ حـ

ملاحظة :
إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا

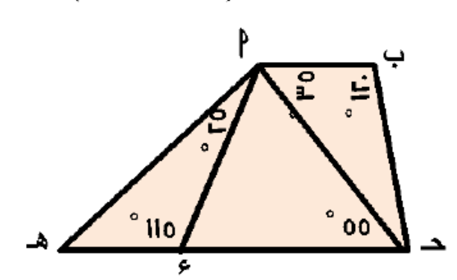
نظرية :
إذا أختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى

المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)
المطلوب : إثبات أن : أ ب > أ حـ
البرهان : ∵ أ ب ، أ حـ قطع مستقيمة
∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات :
(١) أ ب > أ حـ (٢) أ ب = أ حـ (٣) أ ب < أ حـ
إذ ا لم تكن أ ب > أ حـ فإما أ ب = أ حـ أو أ ب < أ حـ
إذا كان : أ ب = أ حـ فإن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ب)
و هذا يخالف المعطيات حيث أن : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)
و إذا كان : أ ب < أ حـ فإن : ق (∠ حـ) < ق (∠ ب)
حسب النظرية السابقة و هذا يخالف المعطيات
حيث أن : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)
∴ يجب أن يكون : أ ب > أ حـ

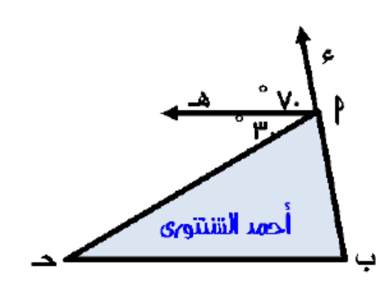
(١) فى الشكل التالى أكمل ما يلى مستخدماً علامة (< أو >) :



[١] ب حـ .... أ ب
[٢] حـ ء .... حـ أ
[٣] أ ء .... أ هـ
[٤] حـ ء .... أ ء



(٢) فى الشكل المقابل :
أ هـ // ب حـ ،
ق(∠ ء أ هـ) = ٧٠° ،
ق(∠ هـ أ حـ) = ٣٠°
أثبت أن : أ حـ > أ ب



نتيجة (١) :

فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

ففى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∵ ∠ أ حادة ∴ ق(∠ ب) > ق(∠ أ)

فيكون : أ حـ > ب حـ ،

∵ ∠ حـ حادة ∴ ق(∠ ب) > ق(∠ حـ)

فيكون : أ حـ > أ ب

ملاحظة :

فى المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً

نتيجة (٢) :

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم

ففى الشكل المقابل :

أ ب ⊥ ب حـ فيكون حسب نتيجة (١) :

١) من Δ أ ب حـ : أ حـ > أ ب

٢) من Δ أ ب ء : أ ء > أ ب

٣) من Δ أ ب هـ : أ هـ > أ ب



تعريف :

بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم

ففى الشكل السابق :

بعد نقطة أ عن ب حـ هو طول أ ب

(٣) فى الشكل المقابل :

أ ء // ب حـ ، ق(∠ ب أ حـ) = ٧٠° ، ق(∠ حـ أ ء) = ٣٠°

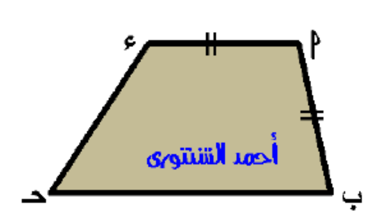
أثبت أن : ب حـ > أ ب

(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ،

ق(∠ أ ء حـ) < ق(∠ أ ب حـ)

أثبت أن : ب حـ < حـ ء

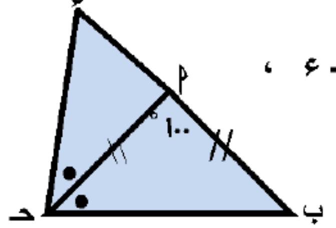


(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، حـ أ ينصف ∠ ب حـ ء ،

ق(∠ ب أ حـ) = ١٠٠°

أثبت أن : ء حـ < أ ب

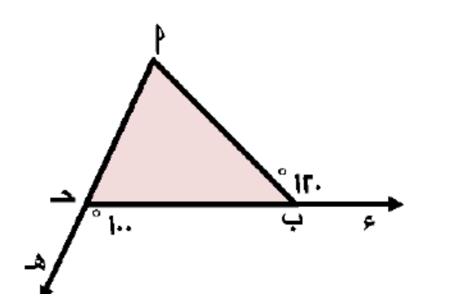


(٦) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ ب ء) = ١٢٠° ،

ق(∠ ب حـ هـ) = ١٠٠°

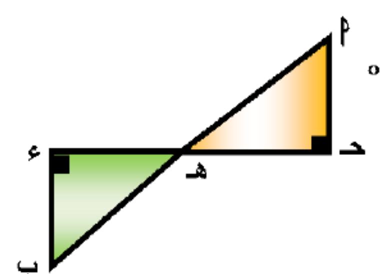
أثبت أن : أ حـ < أ ب



(٧) فى الشكل المقابل :

ق(∠ ب) = ق(∠ ء) = ٩٠°

أثبت أن : أ ب < حـ ء



(٨) Δ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ) = (٥ س + ٢)° ، ق(∠ ب) = (٦ س − ١٠)° ، ق(∠ حـ) = (س + ٢٠)°

رتب أطوال أضلاع Δ أ ب حـ تصاعدياً

(٩) أكمل ما يلى :

[١] أصغر زوايا المثلث فى القياس يقابلها .... الأضلاع طولاً

[٢] أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

[٣] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ ب) = ٣٠°
فإن أصغر أضلاع المثلث طولاً هو ....

[٤] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ق(∠ ب) + ق(∠ حـ)
فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو ....

[٥] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ حـ) = ١١٠°
فإن أكبر أضلاع المثلث طولاً هو ....

(١٠) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ ب) > ق(∠ حـ) فإن : ....
(أ ب < أ حـ ، ب حـ > أ حـ ، أ حـ > أ ب ، أ ب > ب حـ)

[٢] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ ب) = ٩٠° فإن : ....
(أ حـ < ب حـ ، ب حـ < أ حـ ، أ ب < أ حـ ، أ ب = أ حـ)

[٣] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ ب) = ٦٥° ،
ق(∠ حـ) = ٥٠° فإن : أصغر الأضلاع طولاً هو ....
(أ حـ ، ب حـ ، أ ب ، أ ب)

[٤] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٦٥° ،
ق(∠ ب) = ٧٥° فإن : ....
(أ ب < ب حـ ، ب حـ < أ ب ، أ ب < أ حـ ، أ ب = أ حـ)

[٥] فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق(∠ ب) = ٣٠°
فإن : ب حـ .... أ حـ
(< ، > ، = ، ≡)

[٦] فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) > ق(∠ ب)
فإن : أ حـ .... ب حـ
(< ، > ، = ، ≡)

الدرس الرابع : متباينة المثلث المثلث

حقيقة :

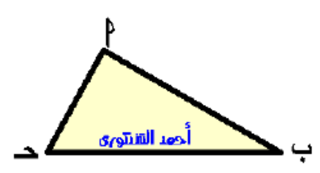
فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

أى أنه : فى أى ∆ ٵ ب حـ يكون :

ٵ ب + ب حـ > ٵ حـ ،

ب حـ + حـ ٵ > ٵ ب ،

حـ ٵ + ٵ ب > ب حـ



ملاحظة (١) :

لبحث صلاحية أى ثلاثة أعداد لأن تكون أطوال أضلاع مثلث

نجمع أصغر عددين منهم و نقارن مجموعهما بالعدد الثالث فإذا كان :

١) مجموعهما أصغر من أو يساوى العدد الثالث

فإن هذه الأعداد لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

٢) إذا كان مجموعهما أكبر من العدد الثالث

فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

فمثلاً :

١) الأعداد : ٤ ، ١١ ، ٧ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٤ + ٧ = ١١

٢) الأعداد : ١٣ ، ٨ ، ٣ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٣ + ٨ = ١١ < ١٣

٣) الأعداد : ٩ ، ٧ ، ١٤ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٩ + ٧ = ١٦ > ١٤

أحمد الشتورى

(١) بين أى الأعداد التالية تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث :

[١] ٣ ، ٦ ، ٩

[٢] ٦ ، ١٠ ، ٧

[٣] ٥ ، ٥ ، ٥

[٤] ٤ ، ٤ ، ٦

[٥] ٤ ، ٦ ، ١١

ملاحظة (٢) :

من متباينة المثلث نجد أن فى أى Δ ا ب حـ يكون :

ا حـ + ا ب > ب حـ (١) ، ∵ ا ب + ب حـ > ا حـ

أى أن : ب حـ > ا حـ − ا ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ا حـ − ا ب < ب حـ < ا حـ + ا ب

∴ ب حـ ∈] ا حـ − ا ب ، ا حـ + ا ب [

أى أن :

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين و أقل من مجموعهما

فمثلاً :

لإيجاد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث للمثلث الذى فيه طولا الضلعين الآخرين هما : ٤ سم ، ٣ سم

نفرض أن : طول الضلع الثالث = ل سم

∴ ٤ − ٣ < ل < ٤ + ٣ ∴ ١ < ل < ٧

∴ ل ∈] ١ ، ٧ [

(٢) أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث للمثلث الذى فيه طولا الضلعين الآخرين هما : ٥ سم ، ٨ سم

(٣) أكمل ما يلى :

[ا] فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين .... طول الضلع الثالث

[٢] فى Δ ا ب حـ يكون : ا حـ .... ا ب + ب حـ

[٣] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما : ٤ سم ، ٩ سم
فإن : أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ... سم

[٤] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما : ٥ سم ، ٨ سم
فإن : أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ... سم

[٥] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين هما :
٤ سم ، ٨ سم فإن : طول الضلع الثالث = ... سم

[٦] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما : ٤ سم ، ٧ سم
فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث = ...

[٧] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما : ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم
فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث = ...

[٨] إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما : ٢ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم
فإن : الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث = ...

(٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] طول أى ضلع الثالث فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين
(أصغر من ، أكبر من ، يساوى ، ضعف)

[٢] إذا كان : طولا ضلعين فى مثلث هما : ٤ سم ، ٧ سم فإن :
طول الضلع الثالث يمكن أن يكون .... سم
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٣] إذا كان : طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين هما : ٢ سم ، ٥ سم فإن : طول الضلع الثالث = ... سم
(٧ ، ٥ ، ٣ ، ٢)

[٤] مثلث طولا ضلعين فيه هما : ٤ سم ، ٩ سم و له محور تماثل واحد فإن : طول الضلع الثالث = ... سم
(٤ ، ٥ ، ٩ ، ١٣)

[٥] مجموعة الأعداد التى تصلح أن تكون أطوال مثلث هى ....
({٠ ، ٣ ، ٥} ، {٣ ، ٣ ، ٦} ، {٣ ، ٣ ، ٧} ، {٣ ، ٣ ، ٥})

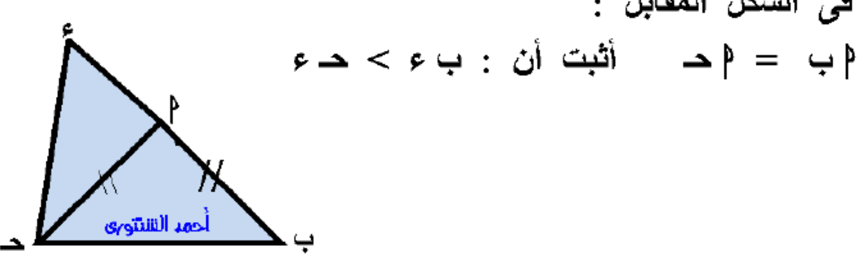
[٦] إذا كان : طولا ضلعين فى مثلث هما : ٥ سم ، ١٠ سم فإن :
طول الضلع الثالث ∋ ....
([٥ ، ١٥ [،] ٥ ، ١٥ [،] ١ ، ١٥] ، [٥ ، ١٥])

[٧] الأعداد : $٢^{س}$ ، س + ٢ ، ٦ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث إذا كانت س = ...
(صفر ، ١ ، ٢ ، ٤)

أحمد الشتورى

(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ أثبت أن : ب ء > حـ ء



(٦) فى الشكل المقابل :

م نقطة داخل Δ أ ب حـ أثبت أن :

م أ + م ب + م حـ > $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب حـ

(٧) برهن أن :
طول أى ضلع فى مثلث أصغر من نصف محيط المثلث

(٨) برهن أن :
محيط أى شكل رباعى أصغر من ضعف مجموع طولى قطريه

(٩) برهن أن :
مجموع طولى قطرى أى شكل رباعى محدب أصغر من محيط الشكل

اجوبة بعض التمارين

الوحدة الأولى — الأعداد الحقيقية

الدرس الأول : الجذر التكعيبى للعدد النسبى

(١)

العدد أ	٢٧	– ٨	– ١٢٥	٢١٦	٤
$\sqrt[٣]{أ}$	٣	– ٢	– ٥	٦	$\sqrt[٣]{٤}$
العدد أ	– $\frac{١}{٦٤}$	٠,٠٠١	– ٣ $\frac{٣}{٨}$	– ٠,١٢٥	– $\frac{٢١٦}{٣٤٣}$
$\sqrt[٣]{أ}$	– $\frac{١}{٤}$	٠,١	– $\frac{٣}{٢}$	– ٠,٥	– $\frac{٦}{٧}$

(٢) [١] – ٣ [٢] ٦٤ [٣] ٥ [٤] ٦٤ [٥] ٤ [٦] ٢ – ٢ = صفر

[٧] ٣ + ٢ = ٥ [٨] ٨ – ٤ = ٤ [٩] ٦١

(٣) [١] ٤ [٢] $\frac{١}{٤}$ [٣] ٢ [٤] ٢

[٥] س^{٢} [٦] ٢ [٧] ٨ [٨] ١٠٠

(٤) [١] ∵ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} = $\frac{٢٧}{٢٤}$ بضرب الطرفين × (٣)

∴ س^{٣} = $\frac{٢٧}{٨}$ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{٣}{٢}$ }

[٢] ∵ س^{٣} – ٧ = ٢٠ بإضافة (٧) للطرفين

∴ س^{٣} = ٢٧ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

[٣] ∵ ٨ س^{٣} + ٧ = ٨ بإضافة (– ٧) للطرفين

∴ ٨ س^{٣} = ١ بقسمة الطرفين على (٨)

∴ س^{٣} = $\frac{١}{٨}$ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{١}{٢}$ }

[٤] ∵ (س – ٢)^{٣} = ٦٤ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س – ٢ = ٤ بإضافة (٢) للطرفين

∴ س = ٦ ∴ مجموعة الحل = { – ١ }

[٥] ∵ (١ – س)^{٣} = ٨ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ ١ – س = ٢ بإضافة (– ١) للطرفين

∴ – س = ١ بقسمة الطرفين على (– ١)

∴ س = – ١ ∴ مجموعة الحل = { – ١ }

[٦] ∵ (٥ س – ٢)^{٣} + ٣ = ٣٠ بإضافة (– ٣) للطرفين

∴ (٥ س – ٢)^{٣} = ٢٧ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ ٥ س – ٢ = ٣ بإضافة (٢) للطرفين

∴ ٥ س = ٥ بقسمة الطرفين على (٥)

∴ س = ١ ∴ مجموعة الحل = { ١ }

(٥) ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ $\frac{٣٢}{٨١}$ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

بالاختصار ينتج : نق^{٣} = $\frac{٨}{٢٧}$ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\frac{٢}{٣}$ وحدة طول

(٦) نفرض أن العدد = س ∴ نصف مكعبه = $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$ = ٢٥٦ بالضرب × ٢

∴ $س^{٣}$ = ٥١٢ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = $\sqrt[٣]{٥١٢}$ = ٨ ∴ العدد هو : ٨

الدرس الثانى : مجموعة الأعداد غير النسبية (ن')

(١) [١] ن [٢] ن [٣] ن [٤] ن' [٥] ن' [٦] ن [٧] ن' [٨] ن

(٢) [١] $\sqrt{٢}$ [٢] $\sqrt{٩}$ [٣] $\sqrt{١٠}$ [٤] $\sqrt[٣]{٤}$

(٣) [١] ٥ $س^{٢}$ = ٢٠ بالقسمة على ٥

$س^{٢}$ = ٤ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ س = ± ٢ ، س ∈ ن

[٢] ٢ $س^{٣}$ = ٦ بالقسمة على ٢

$س^{٣}$ = ٣ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ س = $\sqrt[٣]{٣}$ ، س ∈ ن'

[٣] ٣ $س^{٢}$ = ٢٤ بالقسمة على ٣

$س^{٢}$ = ٨ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ س = ± $\sqrt{٨}$ ، س ∈ ن'

[٤] $(س - ٢)^{٣}$ = ١ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

س - ٢ = ١

∴ س = ٣ ، س ∈ ن

[٥] $(س - ١)^{٢}$ = ٤ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

س - ١ = ٢ أو س - ١ = - ٢

∴ س = ٣ أو س = - ١ ، س ∈ ن

(٤) نفرض أن : طول ضلع المربع = ل سم ∴ مساحته = $ل^{٢}$

∴ $ل^{٢}$ = ٦ ∴ ل = $\sqrt{٦}$ سم

أى أن : طول ضلع المربع = $\sqrt{٦}$ سم

(٥) من الشكل المقابل :

أ ب = ١ م (يمثل طول الجزء الثابت فوق الأرض من الشجرة)

، ∵ طول الشجرة = ٣ م

∴ أ حـ = ٣ - ١ = ٢ م

من Δ أ ب حـ : ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ $(ب حـ)^{٢}$ = $(أ حـ)^{٢}$ - $(أ ب)^{٢}$ = $(٢)^{٢}$ - $(١)^{٢}$

= ٤ - ١ = ٣

∴ ب حـ = $\sqrt{٣}$ م

أى أن : المسافة بين قاعدة الشجرة و نقطة تلاقى قمتها مع الأرض

= $\sqrt{٣}$ متر

الدرس الثالث : إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

(١) [١] ٣ ، ٤ [٢] ٥ ، ٦ [٣] –٢ ، –٣ [٤] ٤ ، ٥

(٢) [١] ∵ ٤ < ٥ < ٩ بأخذ الجذر التربيعى للأطراف

∴ ٢ < $\sqrt{٥}$ < ٣ أى أن : $\sqrt{٥}$ = ٢ + كسر عشرى

و بالتجريب : $(٢,٢)^٢$ ، $(٢,٣)^٢$ نجد :

$(٢,٢)^٢$ = ٤,٨٤ ، $(٢,٣)^٢$ = ٥,٢٩

، ∵ ٤,٨٤ < ٥ < ٥,٢٩ و بأخذ الجذر التربيعى

∴ ٢,٢ < $\sqrt{٥}$ < ٢,٣ ∴ $\sqrt{٥}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

∴ $\sqrt{٥}$ = ٢,٢ لأقرب جزء من عشرة

[٢] ∵ ٩ < ١١ < ١٦ بأخذ الجذر التربيعى للأطراف

∴ ٣ < $\sqrt{١١}$ < ٤ أى أن : $\sqrt{١١}$ = ٣ + كسر عشرى

و بالتجريب : $(٣,٣١)^٢$ ، $(٣,٣٢)^٢$ نجد :

$(٣,٣١)^٢$ = ١٠,٩٥٦١ ، $(٣,٣٢)^٢$ = ١١,٠٢٢٤

، ∵ ١٠,٩٥٦١ < ١١ < ١١,٠٢٢٤ و بأخذ الجذر التربيعى

∴ ٣,٣١ < $\sqrt{١١}$ < ٣,٣٢ ∴ $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣,٣١ ، ٣,٣٢

∴ $\sqrt{١١}$ = ٣,٣١ لأقرب جزء من مائة

[٣] ∵ ١ < ٢ < ٨ بأخذ الجذر التكعيبى للأطراف

∴ ١ < $\sqrt[٣]{٢}$ < ٢ أى أن : $\sqrt[٣]{٢}$ = ١ + كسر عشرى

و بالتجريب : $(١,٢)^٣$ ، $(١,٣)^٣$ نجد :

$(١,٢)^٣$ = ١,٧٢٨ ، $(١,٣)^٣$ = ٢,١٩٧

، ∵ ١,٧٢٨ < ٢ < ٢,١٩٧ و بأخذ الجذر التكعيبى

∴ ١,٢ < $\sqrt[٣]{٢}$ < ١,٣ ∴ $\sqrt[٣]{٢}$ ينحصر بين ١,٢ ، ١,٣

∴ $\sqrt[٣]{٢}$ = ١,٢ لأقرب جزء من عشرة

(٣) [١] ٢ [٢] ٥ [٣] ٨ [٤] ١ [٥] ٢ [٦] ٤

(٤) [١] $\sqrt{٧}$ [٢] –$\sqrt{٣}$ [٣] ٣,١٧ [٤] ٣

(٥) [١] $\sqrt{٥}$ ينحصر بين ٢,٢٤ ، ٢,٢٥

∵ $(\sqrt{٥})^٢$ = $\sqrt{٥}$ × $\sqrt{٥}$ = ٥

، $(٢,٢٣)^٢$ = ٤,٩٧٢٩ ، $(١,٨)^٢$ = ٥,٠١٧٦

، ∵ ٤,٩٧٢٩ < ٥ < ٥,٠١٧٦ و بأخذ الجذر التربيعى

∴ ٢,٢٤ < $\sqrt{٥}$ < ٢,٢٥

أى أن : $\sqrt{٥}$ ينحصر بين ٢,٢٤ ، ٢,٢٥

[٢] ∵ $(\sqrt[٣]{١١})^٣$ = $\sqrt[٣]{١١}$ × $\sqrt[٣]{١١}$ × $\sqrt[٣]{١١}$ = ١١

، $(٢,٢٢)^٣$ = ١٠,٩٤١٠٤٨ ، $(٢,٢٣)^٣$ = ١١,٠٨٩٥٦٧

، ∵ ١٣,٩٤١٤٠٨ < ١١ < ١١,٠٨٩٥٦٧ و بأخذ الجذر التكعيبى

∴ ٢,٢٢ < $\sqrt[٣]{١١}$ < ٢,٢٣

أى أن : $\sqrt[٣]{١١}$ ينحصر بين ٢,٢٢ ، ٢,٢٣

(٦) [١] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار فى نقطة (و)
و ارسم قوساً على يمين النقطة هذه النقطة

حيث : طول الوتر للمثلث = $\frac{١}{٢}$ (٣ + ١) = ٢

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{١}{٢}$ (٣ − ١) = ١

[٢] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار فى نقطة (و)
و ارسم قوساً على يسار النقطة هذه النقطة

حيث : طول الوتر للمثلث = $\frac{١}{٢}$ (٧ + ١) = ٤

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{١}{٢}$ (٧ − ١) = ٣

[٣] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار فى النقطة التى تمثل العدد ١
و ارسم قوساً على يسار النقطة هذه النقطة

حيث : طول الوتر للمثلث = $\frac{١}{٢}$ (٦ + ١) = ٣,٥

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{١}{٢}$ (٦ − ١) = ٢,٥

[٤] ارسم بنفسك مركزاً سن الفرجار فى النقطة التى تمثل العدد ١
و ارسم قوساً على يمين النقطة هذه النقطة

حيث : طول الوتر للمثلث = $\frac{١}{٢}$ (٥ + ١) = ٣

، طول الضلع الآخر للقائمة = $\frac{١}{٢}$ (٥ − ١) = ٢

(٧) ارسم بنفسك ، يكون : ا حـ = $\sqrt{١٣}$ لأن :

(ا حـ)^٢ = (ا ب)^٢ + (ب حـ)^٢ = (٣)^٢ + (٢)^٢ = ١٣

ثم أكمل

(٨) نفرض أن : طول ضلع المربع = ل سم

∴ مساحته = ل^٢

∴ ل^٢ = ١٠

∴ ل = $\sqrt{١٠}$ سم

أى أن : طول ضلع المربع = $\sqrt{١٠}$ سم

∵ Δ ا ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ (ا حـ)^٢ = (ا ب)^٢ + (ب حـ)^٢

= ($\sqrt{١٠}$)^٢ + ($\sqrt{١٠}$)^٢ = ١٠ + ١٠ = ٢٠

∴ ا حـ = $\sqrt{٢٠}$ سم

أى أن : طول قطر المربع = $\sqrt{٢٠}$ سم

(٩) ∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

∴ ٢ $\sqrt{٥}$ π = ٢ π نق ، بالقسمة على = ٢ π ينتج :

نق = $\sqrt{٥}$ سم ،

مساحة سطح الدائرة = π نق^٢ = π × ($\sqrt{٥}$)^٢ = ٥ π سم^٢

الدرس الرابع : مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(١) [١] ح [٢] ∅ [٣] ح* [٤] ∅ [٥] ن' [٦] ن

(٢) أجب بنفسك

(٣) [١] ن ∪ ن' [٢] ح$_-$ [٣] س^٢ [٤] ٢

(٤) أجب بنفسك

الدرس الخامس : علاقة الترتيب فى ح

(١) رتب الأعداد تصاعدياً :

$\sqrt[3]{-1} = -1 = -\sqrt{1}$ ، $\sqrt{36} = 6$

الترتيب تصاعدياً : $-\sqrt{45}$ ، -1 ، $\sqrt{20}$ ، $\sqrt{27}$ ، 6

(٢) $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt{9}$

الترتيب تنازلياً : $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{8}$ ، $-\sqrt{7}$ ، -3 ، $-\sqrt{11}$

(٣) [١] < [٢] = [٣] > [٤] < [٥] < [٦] <

(٤) [١] موجبة [٢] سالبة [٣] موجبة [٤] سالبة [٥] موجبة [٦] موجبة

(٥) أكتب عدد نسبى و أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين ٥ ، ٧

∵ $(5)^2 = 25$ ، $(7)^2 = 49$

∴ الأعداد : ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، .... ، ٣٦ ، .... ، ٤٨

تنحصر بين ٢٥ ، ٤٩ أى أن :

الأعداد : $\sqrt{26}$ ، $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{28}$ ، .... ، $\sqrt{36}$ ، .... ، $\sqrt{48}$

تنحصر بين ٥ ، ٧ فيكون : العدد النسبى هو : $\sqrt{36} = 6$

و الأربعة أعداد النسبية هى : $\sqrt{26}$ ، $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{28}$ ، $\sqrt{48}$

توجد أعداد أخرى ....

(٦) بتربيع و تكعيب الطرفين ينتج :

$((\sqrt[3]{3})^3)^2 = (3)^2 = 9$ ، $((\sqrt{2})^2)^3 = (2)^3 = 8$

، ∵ $9 > 8$ ∴ $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

الدرس السادس : الفترات

(١) [١] {س : س ∈ ح ، −٣ < س ≤ ٤}

[٢] {س : س ∈ ح ، ٢ < س < ٧} ، مثل بنفسك

(٢) [١] [−٤ ، ٤] [٢] [−٥ ، −١[، مثل بنفسك

(٣) [١] ∈ [٢] ∉ [٣] ∈ [٤] ∉ [٥] ∈ [٦] ⊂ [٧] ⊄ [٨] ⊄ [٩] ⊂

(٤) [١] {س : س ∈ ح ، س ≤ ٤} ، مثل بنفسك

[٢] {س : س ∈ ح ، س > ٢}

(٥) [١] [٤ ، ∞[[٢]]−∞ ، −١[، مثل بنفسك

(٦) [١] ∈ [٢] ∈ [٣] ∉ [٤] ∉ [٥] ∈ [٦] ⊂ [٧] ⊄ [٨] ⊂ [٩] ⊂

(٧) مثل بنفسك ، [١] [−٢ ، ٠] [٢] [−٤ ، ٣]

[٣]]٠ ، ٣] [٤] [−٤ ، −٢[

(٨) مثل بنفسك ، [١] [−٤ ، ٣] [٢] ح

[٣]]٣ ، ∞[[٤]]−∞ ، −٤[

(٩) [١]]٣ ، ٥] [٢]]٣ ، ٥[[٣] {٣ ، ٥} [٤]]−١ ، ٤]

[٥] ∅ [٦]]٠ ، ١] [٧]]−∞ ، ٣] [٨] [٣ ، ٤[[٩] صفر

(١٠) [١] [١ ، ٣] [٢] [٠ ، ٩] [٣] [−٨ ، ٨]

[٤]]٠ ، ١[[٤] [−٢ ، ٤[

(١١) ∵ س ⊂ ص ∴ س = س ∩ ص = [٤ ، ٧] ،

ص = س ∪ ص = [٣ ، ٧]

∴ ص − س = [٣ ، ٤]

(١٢) س = [٢ ، ٦] ، ص = [١ ، ٤]

الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

(١) [١] صفر [٢] $٤\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$

(٢) [١] $٢\sqrt{٧}$ [٢] $\sqrt{٣}$ [٣] صفر [٤] ٢ [٥] $٤\sqrt[٣]{٩}$

[٦] $\sqrt[٣]{٢}$ [٧] $٢\sqrt{٦}$ [٨] ٢ [٩] $\sqrt{٢} - ١$ [١٠] الصفر

(٣) [١] $١٠ - \sqrt{٥}$ [٢] ١٠

(٤) [١] ٧ [٢] $\sqrt{٣}$ [٣] $٣\sqrt{٢}$ [٤] ٣٠ [٥] ١٦

[٦] $٥ + \sqrt{١٠}$ [٧] $٦ - ٣\sqrt{٣}$ [٨] ١ [٩] $٩ + ٤\sqrt{٥}$

[١٠] $٣\sqrt{٢}$ [١١] ١

(٥) [١] س + ص = $\sqrt{٣} + ٢ + \sqrt{٣} - ٢ = ٢\sqrt{٣}$

[٢] س ص = $(\sqrt{٣} + ٢)(\sqrt{٣} - ٢) = ٣ - ٤ = -١$

[٣] س² − ٢ س ص + ص² = (س − ص)² = $(٢)^٢ = ١٦$

حل آخر : س² = $(\sqrt{٣} + ٢)^٢ = ٧ + ٤\sqrt{٣}$

، ص² = $(\sqrt{٣} - ٢)^٢ = ٧ - ٤\sqrt{٣}$

، ٢ س ص = $٢ \times (-١) = -٢$

∴ المقدار = $٧ + ٤\sqrt{٣} - (-٢) + ٧ - ٤\sqrt{٣} = ١٦$

(٦) تقدير $\sqrt{١٠}$ هو : ٣ لأن : $\sqrt{٩} = ٣$

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})$ هو : $٥ + ٣ = ٨$

، تقدير $\sqrt[٣]{٧}$ هو ٢ لأن : $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

∴ تقدير $(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : $٣ - ٢ = ١$

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : $٨ \times ١ = ٨$

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو : ٨,٨٧٢٩

أى أن التقدير مقبول

(٧) تقدير $\sqrt{١٥}$ هو : ٤ لأن : $\sqrt{١٦} = ٤$

∴ تقدير $(٢ + \sqrt{١٥})$ هو : $٢ + ٤ = ٦$

، تقدير $\sqrt[٣]{٢٥}$ هو ٣ لأن : $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

∴ تقدير $(٤ - \sqrt[٣]{٢٥})$ هو : $٤ - ٣ = ١$

∴ تقدير $(٢ + \sqrt{١٥})(٤ - \sqrt[٣]{٢٥})$ هو : $٦ \times ١ = ٦$

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو : ٦,٣١٩٢

أى أن التقدير مقبول

(٨) [١] $٢\sqrt{٥}$ [٢] ٨ [٣] ٤٠ [٤] $-٣\sqrt{٢}$ [٥] $\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$

[٦] $\sqrt{٥}$ [٧] $٢\sqrt{٣} - ١$ [٨] $-\sqrt{٣}$ [٩] $٢\sqrt{٥}$ [١٠] ٤٠

[١١] ٣١ [١٢] $٢\sqrt{٢} + ٣$ [١٣] $\pm\sqrt{٣}$ [١٤] $٨\sqrt{٢}$ [١٥] ٥

الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

(١) [١] $\sqrt{٨} = \sqrt{٤ \times ٢} = ٢\sqrt{٢}$

[٢] $\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = ٢\sqrt{٥}$

[٣] $\sqrt{٤٨} = \sqrt{١٦ \times ٣} = ٤\sqrt{٣}$

[٤] $٢\sqrt{٧٥} = ٢\sqrt{٢٥ \times ٣} = ٢ \times ٥\sqrt{٣} = ١٠\sqrt{٣}$

[٥] $\frac{١}{٦}\sqrt{٧٢} = \frac{١}{٦}\sqrt{٣٦ \times ٢} = \frac{١}{٦} \times ٦\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

(٢) [١] $٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} = ٧\sqrt{٢}$

[٢] $٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} = -\sqrt{٥}$

[٣] $٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

[٤] $٧\sqrt{٢} - ٨\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

(٣) [١] مرافق العدد $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$ هو $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})$

و مجموعهما = $٢\sqrt{٥}$ و حاصل ضربهما = ٣

[٢] مرافق العدد $(٣ - \sqrt{٧})$ هو $(٣ + \sqrt{٧})$

و مجموعهما = ٦ و حاصل ضربهما = ٢

[٣] مرافق العدد $(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٦})$ هو $(٢\sqrt{٣} - \sqrt{٦})$

و مجموعهما = $٤\sqrt{٣}$ و حاصل ضربهما = ٦

(٤) بالضرب فى مرافق المقام و الاختصار ينتج :

[١] $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ [٢] $٧ + ٤\sqrt{٣}$

(٥) بالضرب ف المرافق ينتج : ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$

∴ س ، ص مترافقان ، س^٢ = $٨ + ٢\sqrt{١٥}$

، ص^٢ = $٨ - ٢\sqrt{١٥}$ ، س ص = ٢

[١] س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = ٢٠

حل آخر : المقدار = (س + ص)^٢ = $(٢\sqrt{٥})^٢$ = ٢٠

[٢] س^٢ − س ص + ص^٢ = ١٤

(٦) ∵ س = $\sqrt{١٣} + \sqrt{٦}$ ، س ص = ٧

∴ ص = $\sqrt{١٣} - \sqrt{٦}$ ، س + ص = $٢\sqrt{١٣}$

[١] المقدار = $\sqrt{١٣}$ [٢] (س ص)^٢ = ٤٩

(٧) [١] $\sqrt{٣}$ [٢] $٢\sqrt{٢}$ [٣] ٢ [٤] ١٨ [٥] $\sqrt{٢}$

[٦] $\frac{١}{١٠}\sqrt{٢}$ [٧] $\sqrt{٥٠}$ [٨] $\sqrt{٣}$ [٩] −٢ [١٠] ١

(٨) [١] $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ [٢] $(٣ ، ٢\sqrt{٥})$

[٣] $(٢ + \sqrt{٥} - ٢ + \sqrt{٥})^٢ = ٢٠$

[٤] $\frac{١}{٢} \times ٢ (\sqrt{٧} + ١)(\sqrt{٧} - ١) = ٦$ سم^٢

[٥] $\sqrt{٢} + ١$ [٦] $٤\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

[٧] $٢\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٦} - ٤\sqrt{٦}$ = صفر

الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

(١) [١] $٢\sqrt[٣]{٢}$ [٢] $-٢\sqrt[٣]{٥}$ [٤] $٦\sqrt[٣]{٣}$ [٥] $\sqrt[٣]{٢}$

(٢) [١] $٣\sqrt[٣]{٢} - ٥\sqrt[٣]{٢} = -٢\sqrt[٣]{٢}$

[٢] $٣\sqrt[٣]{٤} + ٢\sqrt[٣]{٤} = ٥\sqrt[٣]{٤}$

[٣] $٣\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٣} = ٤\sqrt[٣]{٣}$

[٤] ٥ ∛٢ − ٢ × ٤ ∛٢ + ٣ ∛٢ = صفر

(٣) [١] ∛٣   [٢] ٥ ∛٥   [٣] ٦   [٤] ∛٨   [٥] − ٨ ∛٣

(٤) [١] ٧/٣ × ٣ √٢ + ٣ ∛٢ − ٧ √٢ + ٢ ∛٢ =

٧ √٢ + ٣ ∛٢ − ٧ √٢ + ٢ ∛٢ = ٥ ∛٢

[٢] ٣ ∛٣ − ٢ √٧ − ٢ ∛٣ + ٣ √٧ =

∛٣ + √٧

(٥) [١] (٢ ∛٦)³ = ٨ × ٦ = ٤٨   [٢] (٦)³ = ٢١٦

الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

(١) ∵ محيط الدائرة = ٢ π نق   ∴ ٨٨ = ٢ × ٢٢/٧ نق

و منها : ١٤ سم

∴ مساحة سطح الدائرة = π نق²

= ٢٢/٧ × ١٤ × ١٤ = ٦١٦ سم²

(٢) ∵ مساحة الدائرة = π نق²   ∴ ٣١٤ = ٣,١٤ × نق²

∴ نق² = ٣١٤ ÷ ٣,١٤ = ١٠٠   ∴ نق = ١٠ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ١٠ = ٦٢,٨ سم

(٣) نفرض أن : طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ طول ضلع المربع = ٢ نق

محيط الجزء المظلل = هـ ب + ب ى + ١/٤ محيط الدائرة

∴ ٢٥ = نق + نق + ١/٤ × ٢ × ٢٢/٧ نق

∴ ٢٥ = ٢٥/٧ نق   و منها : نق = ٧ سم

∴ طول ضلع المربع = ٧ سم   ∴ مساحة المربع = ٤٩ سم²

، مساحة الدائرة = ٢٢/٧ × ٤٩ = ١٤٥ سم²

(٤) مساحة القاعدة = ٧٢٠ ÷ ٤ = ١٤٤ سم²

طول ضلع القاعدة = √١٤٤ = ١٢ سم

∴ المساحة الكلية = ٢ × (١٢ × ١٢ + ١٢ × ٥ + ١٢ × ٥)

= ٥٨٢ سم²

(٥) طول حرف المكعب = ∛١٢٥ = ٥ سم

مساحة المكعب الكلية = ٦ × ٥ × ٥ = ١٥٠ سم²

(٦) مساحة الوجه لبواحد للمكعب ٢٩٤ ÷ ٦ = ٤٩ سم²

∴ طول حرف المكعب = √٤٩ = ٧ سم

∴ حجم المكعب = ٧ × ٧ × ٧ = ٣٤٣ سم³

، حجم متوازى المستطيلات = ٧ √٢ × ٥ √٢ × ٥ = ٣٥٠ سم³

∴ حجم متوازى المستطيلات أكبر من حجم المكعب

(٧) أبعاد الحوض هى : ٢٥ − ٨ = ١٧ سم ، ١٥ − ٨ = ٧ سم

، ٤ سم   ∴ حجم الحوض = ١٧ × ٧ × ٤ = ٤٧٦ سم³

، المساحة الكلية = ٢ × (١٧ × ٧ + ٧ × ٤ + ١٧ × ٤)

= ٣١١ سم^{٢}

(٨) طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{١٧٢٨}$ = ١٢ سم

المساحة الكلية للمكعب = مساحة الوجه الواحد × ٦

= (١٢ × ١٢) × ٦ = ١٤٤ × ٦ = ٨٦٤ سم^{٢}

المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = ٢ × (٣ + ٢) × ١

= ٢ × ٥ × ١ = ١٠ سم^{٢}

المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات = ١٠ + ٢ × (٣ × ٢)

= ١٠ + ٢ × ٦ = ٢٢ سم^{٢}

المساحة الكلية للجزء المتبقى = ٨٦٤ − ٢٢ = ٨٤٢ سم^{٢}

(٩) ∵ ارتفاع متوازى مستطيلات = ٣ سم

∴ مجموع الأربعة ارتفاعات = ٤ × ٣ = ١٢ سم

، ∵ مجموع أطوال أحرفه = ٥٢ سم

∴ مجموع باقى الأحرف الثمانية = ٥٢ − ١٢ = ٤٠ سم

، ∵ القاعدة مربعة الشكل ∴ طول الحرف = $\frac{٤٠}{٨}$ = ٥ سم

∴ الحجم = ٥ × ٥ × ٣ = ٧٥ سم^{٣}

(١٠) محيط قاعدة الأسطوانة = ب حـ

∴ ٢ π نق = ٤٤ ∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق = ٤٤

و منها : نق = ٧ سم ، الارتفاع = أ ب = ١٠ سم

∴ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ١٠ = ١٥٤٠ سم^{٣}

(١١) ∵ محيط القاعدة = ٢ π نق ∴ ٤٤ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق

و منها : نق = ٧ سم ، ∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

∴ ٣٨٥٠ = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ ع و منها : ع = ٢٥ سم

(١٢) ∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

∴ ٧٥٣٦ = ٣,١٤ نق^{٢} × ٢٤ و منها : نق^{٢} = ١٠٠ سم

∴ نق = ١٠ سم

∴ المساحة الكلية للأسطوانة = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢ × ٣,١٤ × ١٠ × ٢٤ + ٢ × ٣,١٤ × ١٠٠ = ٣١٢٥,٢ سم^{٢}

(١٣) حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ × ١٠ = ١٥٤٠ سم^{٣}

حجم المكعب = ١١ × ١١ × ١١ = ١٣٣١ سم^{٣}

∴ حجم الأسطوانة أكبر من حجم المكعب

(١٤) حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ١١ × ١١ × ١٠,٥

= ٣٩٩٣ سم^{٣}

∴ حجم المكعب الواحد = ٣٩٩٣ ÷ ٣ = ١٣٣١ سم^{٣}

∴ طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{١٣٣١}$ = ١١ سم

(١٥) ∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع ، ع = نق

∴ ٢٧ π = π نق^{٣} و منها : نق = ع = ٣ سم

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ π نق ع = ٢ π × ٣ × ٣

= ١٨ π سم^{٢}

(١٦) كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^{٢} أوجد حجمها (π = ٣,١٤)

∵ مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

∴ ١٢٥٦ = ٤ × ٣,١٤ نق^{٢} و منها : نق = ١٠ سم

∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × ١٠٠٠ = ٤١٨٧ سم^{٣}

(١٧) طول نصف قطر الكرة = ٣ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ π × ٢٧ = ٣٦ π سم^{٣}

، ∵ حجم الأسطوانة = حجم الكرة

∴ π نق^{٢} ع = ٣٦ π ∴ π × ٩ ع = ٣٦ π

و منها : ع = ٤ سم

(١٨) حجم متوازى المستطيلات = ٧٧ × ٢٤ × ٢١ = ٣٨٨٠٨ سم^{٣}

، ∵ حجم الكرة = حجم متوازى المستطيلات

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٣٨٨٠٨   ∴ $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٣} = ٣٨٨٠٨

∴ نق^{٣} = ٣٨٨٠٨ × $\frac{٢١}{٨٨}$ = ٩٢٦١   و منها : نق = ٢١ سم

(١٩) ∵ الكرة تمس أوجه المكعب الستة ∴ طول حرف المكعب = ٢ نق

، ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ ٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

∴ نق^{٣} = ٣٦ × $\frac{٣}{٤}$ = ٢٧   ∴ نق = ٣ سم

∴ مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٩ = ١١٣ سم^{٢}

، طول حرف المكعب = ٢ × ٣ = ٦ سم

∴ حجم المكعب = (٦)^{٣} = ٢١٦ سم^{٣}

(٢٠) حجم المعدن = حجم الكرة الخارجى – حجم الكرة الداخلى

= $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{١}^{٣}$ – $\frac{٤}{٣}$ π نق$_{٢}^{٣}$

= $\frac{٤}{٣}$ π (نق$_{١}^{٣}$ – نق$_{٢}^{٣}$)

= $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ ((٣,٥)^{٣} – (٢,١)^{٣}) = ١٤٠,٨٥٩ سم^{٣}

∴ كتلة المعدن = ١٤٠,٨٥٩ × ٢٠ = ٢٨١٧ جراماً

(٢١) [١] ٤ π [٢] ١,٥   [٣] ٢٤   [٤] $\sqrt{٢}$ [٥] ١٠   [٦] ٤

الدرس الحادى عشر : حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

(١) مثل بنفسك الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س = – ٦ ∴ س = – ٢ ∴ مجموعة الحل = { – ٢ }

[٢] س = ٠ ∴ مجموعة الحل = { ٠ }

[٣] س = – ٤ ∴ مجموعة الحل = { – ٤ }

[٤] $\sqrt{٣}$ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt{٣}$ }

[٥] س = $\sqrt{٢}$ + ١ ∴ مجموعة الحل = { $\sqrt{٢}$ + ١ }

[٦] ٧ س = ٧ √٧ ∴ س = √٧

∴ مجموعة الحل = { √٧ }

(٢) مثل بنفسك الحل على خط الأعداد

[١] ٣ س > ٣ ∴ س > ١ ∴ مجموعة الحل =] ١ ، ∞ [

[٢] – ٤ س ≥ – ٨ ∴ س ≤ ٢

∴ مجموعة الحل =] – ∞ ، ٢]

[٣] – ٢ < ٢ س ≤ ٦ ∴ – ١ < س ≤ ٣

∴ مجموعة الحل =] – ١ ، ٣]

[٤] ½ س ≤ ١ ∴ س ≤ ٢

∴ مجموعة الحل =] – ∞ ، ٢]

[٥] – ٢ ≥ ٢ س – ٥ ∴ ٣ ≥ ٢ س

∴ س ≤ ٣/٢ ∴ مجموعة الحل =] – ∞ ، ٣/٢]

[٦] – ١ ≤ ٢ س – ٣ ≤ ٥ ∴ ٢ ≤ ٢ س ≤ ٨

∴ ١ ≤ س ≤ ٤ ∴ مجموعة الحل = [١ ، ٤]

[٧] ٢ < ٣ س – ١ ≤ ٨ ∴ ٣ < ٣ س ≤ ٩

∴ ١ < س ≤ ٣ ∴ مجموعة الحل =] ١ ، ٣]

[٨] – ٢ < س + ١ ≤ ٣ ∴ – ٣ < س ≤ ١

∴ مجموعة الحل =] – ٣ ، ١]

(٣) ∵ أ ≤ س – ٣ ≤ ب ∴ أ + ٣ ≤ س ≤ ب + ٣

∴ مجموعة الحل = [أ + ٣ ، ب + ٣]

∴ [٤ ، ٧] = [أ + ٣ ، ب + ٣]

∴ ٤ = أ + ٣ ، و منها : أ = ١

، ٧ = ب + ٣ ، و منها : ب = ٤

(٤) [١] { ٥ } [٢] { ٢ ، √٢ } [٣] { ٢ ، √٣ } [٤]] ٧ ، ∞ [

[٥]] – ١ ، ١ [[٦] [٠ ، ٢] [٧]] – ١ ، ٧ [

[٨] – س ≤ – ٢ [٩] س ≥ – ٢

(٥) [١] ٣٦ [٢] ٨ [٣] ٢ [٤] ١ [٥] ١ [٦] ٩ [٧]] – ∞ ، ٣ [

[٨] [١ ، ∞ [[٩] [١ ، ٣ [[١٠] < [١١] > [١٢] < [١٣]] – ١ ، ٣ [

الوحدة الثانية العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

(١) نفرض أن : عدد الأوراق فئة ٥ جنيهات هو س

∴ قيمتها = ٥ س جنيهاً

و عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهاً هو : ص ∴ قيمتها = ٢٠ ص جنيهاً

∴ ٥ س + ٢٠ ص = ٨٥ بالقسمة على ٥

∴ س + ٤ ص = ١٧ ∴ س = ١٧ – ٤ ص

و تكون الإمكانات المختلفة هي :

س	١٣	٩	٥	١
ص	١	٢	٣	٤

(٢) نفرض أن : طول أى من الضلعين المتساويين فى المثلث = س سم
، طول الضلع الثالث = ص سم
∵ محيط المثلث = ١٩ سم　∴ ٢ س + ص = ١٩
∴ ص = ١٩ – ٢ س　، ∵ س ، ص ∈ ص+
∴ س لا يمكن أن تزيد عن ٩
، ∵ مجموع طولى أى ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث
∴ س تأخذ القيم : ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
، ص تأخذ القيم : ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١
أى أن : الإمكانات المختلفة هى :

س	٥	٦	٧	٨	٩
ص	٩	٧	٥	٣	١

(٣) [١] س = ٥ + ٢ ص
بوضع ص = ٠　∴ س = ٥ + ٢ × ٠ = ٥
∴ (٥ ، ٠) يحقق العلاقة
بوضع ص = ١　∴ س = ٥ + ٢ × ١ = ٧
∴ (٧ ، ١) يحقق العلاقة
بوضع ص = ٢　∴ س = ٥ + ٢ × ٢ = ٩
∴ (٩ ، ٢) يحقق العلاقة
[٢] ٢ س = ١٠ – ٥ ص
بوضع ص = ٠　∴ ٢ س = ١٠ – ٥ × ٠ = ١٠
∴ س = ٥　∴ (٥ ، ٠) يحقق العلاقة
بوضع ص = ٢　∴ ٢ س = ١٠ – ٥ × ٢ = ٠
∴ س = ٠　∴ (٠ ، ٢) يحقق العلاقة
بوضع ص = – ٢　∴ ٢ س = ١٠ – ٥ × (– ٢) = ٢٠
∴ س = ١٠　∴ (١٠ ، – ٢) يحقق العلاقة

(٤) [١] نضع : س = ٥　، ص = ٣
∴ ٢ س – ص = ٢ × ٥ – ٣ = ١٠ – ٣ = ٧ ≠ ١
∴ (٥ ، ٣) لا يحقق العلاقة
[٢] نضع : س = ٣　، ص = ٥
∴ ٢ س – ص = ٢ × ٣ – ٥ = ٦ – ٥ = ١
∴ (٣ ، ٥) يحقق العلاقة
[٣] نضع : س = – ٢　، ص = – ٥
∴ ٢ س – ص = ٢ × (– ٢) – (– ٥) = (– ٤) + ٥ = ١
∴ (– ٢ ، – ٥) يحقق العلاقة

(٥) [١] ٧　[٢] – ١١　[٣] ٢　[٤] (١ ، ٣)
[٥] (٢ ، ٣)　[٦] ص = ٣ س + ١

(٦) ٢ س – ص = ٣
بوضع س = ٠　∴ ٢ × ٠ – ص = ٣
∴ ص = – ٣　∴ (٠ ، – ٣) يحقق العلاقة
بوضع س = ١　∴ ٢ × ١ – ص = ٣
∴ ص = – ١　∴ (١ ، – ١) يحقق العلاقة
بوضع س = ٢　∴ ٢ × ٢ – ص = ٣

∴ ص = ١   ∴ (٢ ، ١) يحقق العلاقة

كون الجدول و أرسم المستقيم بنفسك

(٧) بوضع : ص = ٠ ينتج : س = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هى (٢ ، ٠)

بوضع : س = ٠ ينتج : ص = − ٤

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هى (٠ ، − ٤)

أرسم المستقيم بنفسك

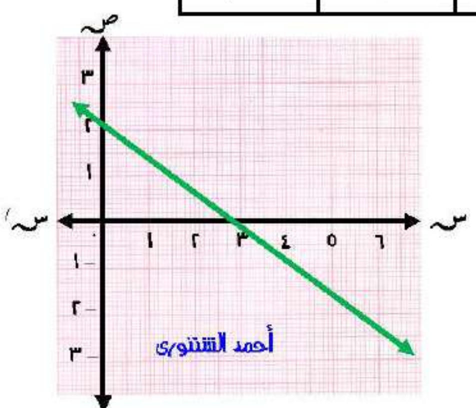
(٨) ∵ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، م)

∴ م = ٠ ، (٣ ، ٠) تحقق العلاقة : ٢س − ص = ل

∴ ٢ × ٣ − ٠ = ل و منها : ل = ٦

(٩) ٢س + ٣ص = ٦

س	٠	٣	٦
ص	٢	٠	− ٢



من الرسم :

مساحة Δ و أ ب =

$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٣$

٣ وحدة مربعة

الدرس الثانى : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

(١) [أ] $م = \frac{٢ - ١}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$ [ب] $\frac{-٥ + ٥}{٦ - ٣} = ٠$

[ج] $م = \frac{٠ - ٢}{٠ + ٢} = -١$ [د] $\frac{-٤ + ٣}{-٢ + ١} = ١$

(٢) $\frac{٦ - ١}{س + ١} = ٥$ ∴ $\frac{٥}{س + ١} = ٥$

∴ ٥ س + ٥ = ٥ ، منها : س = ٠

(٣) $\frac{ص}{١ + ١} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{ص}{٢} = \frac{٣}{٢}$ و منها : ص = ٣

(٤) ∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، − ١) ، (س ، ٢)

∴ ميله $= \frac{١ + ١}{س - ٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{٢}{س - ٣} = \frac{٢}{٣}$

∴ س − ٣ = ٣ ، منها : س = ٦

، ∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، − ١) ، (٩ ، ص)

∴ ميله $= \frac{ص + ١}{٩ - ٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{ص + ١}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ص + ٣ = ١٢ ، منها : ص = ٣

(٥) ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{٢ + ١}{٣ - ١} = \frac{٣}{٢}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{٥ - ٢}{٤ - ٣} = ٣$

، ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٥ + ١}{٤ - ٢} = \frac{٣}{٢}$

نلاحظ أن : النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

(٦) ∵ المستقيم يوازى محور السينات ∴ ميله = صفر

∴ $\frac{ل - ٤}{٢ - ٣} = ٠$ ∴ ل − ٤ = ٠ ، منها : ل = ٤

(٧) ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، − ١) ، (٢ ، ١) $= \frac{١ + ١}{٢ - ١} = \frac{٢}{١}$

، ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (− ٢ ، − ٧)

= $\frac{٣ + ٧}{٣ + ٥}$ = $\frac{٢}{١}$ ∴ ميلا المستقيمان متساويان

(٨) ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٥ - ٣}{٢ + ١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{١ - ٥}{٨ - ٢}$ = $-\frac{٢}{٣}$

∴ حـ ∉ $\overleftrightarrow{أ ب}$

(٩) [١] سالب [٢] صفر [٣] غير معرف [٤] موجب

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم :

(١) [١] أ = (٠ ، ٢٠) ، ب = (٤ ، ٦٠)

حـ = (٦ ، ٦٠) ، ء = (٨ ، ٥٠)

[٢] ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٦٠ - ٢٠}{٤ - ٠}$ = ١٠

و هو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة بمعدل ١٠ آلاف جنيه خلال السنوات الأربعة الأولى

[٣] ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{٤٠ - ١٠٠}{٣ - ٠}$ = صفر

و هو يعبر عن ثبات رأس مال الشركة خلال السنتين الخامسة و السادسة

[٤] ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = $-$ ٥

و هو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة بمعدل ٥ آلاف جنيه خلال السنتين الأخيرتين

[٥] رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند .... = ... ألف جنيه

(٢) [١] أ = (٣ ، ٦٠) ، ب = (٥ ، ٣٠) ،

حـ = (٦ ، ٣٠) ، ء = (٨ ، ٠)

[٢] السرعة المنتظمة للسيارة خلال رحلة الذهاب = ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$

= $\frac{٦٠ - ٠}{٣ - ٠}$ = ٢٠ كم / س

[٣] المسافة الكلية خلال رحلة العودة = ٦٠ كم

[٤] الزمن الكلى خلال رحلة العودة = ٥ ساعة

[٥] سرعة المتوسطة للسيارة خلال رحلة العودة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

= $\frac{٦٠}{٥}$ = ١٢ كم / س

[٦] القطعة المستقيمة الأفقية بالشكل تدل على توقف السيارة خلال الساعة السادسة من بدء الحركة

(٣) [١] أكبر سعة للخزان = ٧٠ لتر

[٢] يفرغ الخزان بعد مرور ٣٠ ساعة

[٣] بعد مرور ١٥ ساعة يتبقى بالخزان ٣٥ لتر

[٤] يتبقى بالخزان ١٠ لتر بعد مرور ٢٥ ساعة

[٥] أ = (٠ ، ٧٠) ، ب = (٣٠ ، ٠)

[٦] ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٧٠ - ٠}{٠ - ٣٠}$ = $-$ ٢ $\frac{١}{٣}$

[٧] معدل استهلاك الوقود فى الساعة الواحدة = $-$ ٢ $\frac{١}{٣}$ لتر / ساعة

(٤) [١] عدد صفحات الكتاب المتبقية عن بداية القراءة = ١٠٠ صفحة

[٢] أ = (٠ ، ١٠٠) ، ب = (٣ ، ٤٠)

[٣] ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٤٠ - ١٠٠}{٣ - ٠}$ = $-$ ٢٠

[٤] معدل الصفحات المقروءة فى الساعة الواحدة = $-$ ٢٠ صفحة / ساعة

و يعنى أن عدد الصفحات ينقص بمعدل ٢٠ صفحة / ساعة

[٥] تنهى سهير قراءة الكتاب بعد : $\frac{١٠٠}{٢٠}$ = ٥ ساعات

(٥) [١] ﺃ = (٠ ، ٥) ، ب = (٤,٥ ، ٢٧,٥) ،
حـ = (٨ ، ٢٧,٥) ، ء = (١٠ ، ٤٠)

[٢] عمق البئر قبل بدء عمل الحفار = ٥ متر

[٣] عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار = ٤٠ متر

[٣] الزمن الكلى الذى أستغرقه الحفار فى الحفر = ١٠ ساعات

[٤] ميل $\overleftrightarrow{ﺃ ب}$ = $\frac{٢٧,٥ - ٥}{٥ - ٠}$ = ٤,٥

[٥] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الخمس ساعات الأولى
= ٤,٥ متر / ساعة

[٦] ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{٤٠ - ٢٧,٥}{١٠ - ٨}$ = ٦,٢٥

[٧] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعتين الأخيرتين
= ٦,٢٥ متر / ساعة

(٦) [١] عدد الصفحات عند : ن = ٠
هى : ص = ٣٠ − $\frac{١}{٢}$ × ٠ = ٣٠
∴ عدد الصفحات المتبقية = ٣٠ صفحة
∴ عدد الصفحات التى سبق لهذا الشخص قراءتها =
٦٠ − ٣٠ = ٣٠ صفحة

[٢] الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات التى يكون عندها عدد الصفحات = ٠ أى عند : ص = ٠
∴ ٣٠ − $\frac{١}{٢}$ ن = ٠ و منها : ن = ٦٠ دقيقة

∴ الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات = ٦٠ دقيقة

الوحدة الثالثة الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات و تنظيمها

(١) [١] ١) أكبر قيمة = ٤٤ ٢) أصغر قيمة = ١٥
٣) المدى = ٤٤ − ١٥ = ٢٩
٤) المدى = $\frac{٢٩}{٥}$ ≃ ٦ مجموعة [٢] كون بنفسك

[٣]

المجموعات	١٥ −	٢٠ −	٢٥ −	٣٠ −	٣٥ −	٤٠ −	المجموع
التكرار	٢	٥	١١	١٢	٦	٤	٤٠

[٤] عدد الأطفال الذين تقل أوزانهم عن ٢٥ كجم = ٧ أطفال

[٥] عدد الأطفال الذين أوزانهم ٢٥ كجم فأكثر = ٣٣ طفل

(٢) [١] ١) أكبر قيمة = ٥٠ ٢) أصغر قيمة = ٢٠
٣) المدى = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠

[٢]

المجموعات	٢٠ −	٢٥ −	٣٠ −	٣٥ −	٤٠ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٤	٣	٥	٧	٦	٥	٣٠

(٣)

المجموعات	٣٠ −	٤٠ −	٥٠ −	٦٠ −	٧٠ −	٨٠ −	٩٠ −	المجموع
التكرار	٤	٥	٧	٨	٦	٤	٦	٤٠

المجموعة التى بها أكبر تكرار هى : ٦٠ −
المجموعة التى بها أقل تكرار هى : ٢٠ − ، ٨٠ −

الدرس الثانى : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيلهما بيانياً

(١)

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	٠
أقل من ٣٠	٣
أقل من ٣٥	١٣
أقل من ٤٠	٣٢
أقل من ٤٥	٥٥
أقل من ٥٠	٦٠



[أ] ٣٦ عامل

(٢)

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥٠	٠
أقل من ٦٠	٥
أقل من ٧٠	٢١
أقل من ٨٠	٥١
أقل من ٩٠	٧٢
أقل من ١٠٠	٨٨
أقل من ١١٠	١٠٠

[أ] ٣٧ مصنع [٢] $\frac{٣٧}{١٠٠} \times ١٠٠ \ \% = ٣٧ \ \%$

(٣)

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١ فأكثر	٥٠
٢ فأكثر	٤٨
٣ فأكثر	٤٥
٤ فأكثر	٤٠
٥ فأكثر	٢٨
٦ فأكثر	١٣
٧ فأكثر	٦
٨ فأكثر	٠

[أ] ١٣ تلميذ

[٢] $\frac{١٣}{٥٠} \times ١٠٠ \ \% = ٢٦ \ \%$

(٤)

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
٥٥ فأكثر	٦٠
٦٠ فأكثر	٥٢
٦٥ فأكثر	٤٠
٧٠ فأكثر	٢٢
٧٥ فأكثر	١٢
٨٠ فأكثر	٥
٨٥ فأكثر	٢
٩٠ فأكثر	٠

[أ] ١٠

[٢] ٢٨ شخصاً

(٥)

جدول التكرار المتجمع الصاعد		جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ٢٠	٠	٢٠ فأكثر	١٠٠٠
أقل من ٣٠	٣٠	٣٠ فأكثر	٩٧٠
أقل من ٤٠	١٠٠	٤٠ فأكثر	٩٠٠
أقل من ٥٠	٢٦٠	٥٠ فأكثر	٧٤٠
أقل من ٦٠	٥٢٠	٦٠ فأكثر	٤٨٠
أقل من ٧٠	٦٧٠	٧٠ فأكثر	٣٣٠
أقل من ٨٠	٨٠٠	٨٠ فأكثر	٢٠٠
أقل من ٩٠	٩١٠	٩٠ فأكثر	٩٠
أقل من ١٠٠	١٠٠٠	١٠٠ فأكثر	٠

[١] ٧٤٠ طالب

[٢] ١٤٠ طالب

(٦)

جدول التكرار المتجمع الصاعد		جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ٠	٠	٠ فأكثر	١٠٠
أقل من ١٠	٨	١٠ فأكثر	٩٢
أقل من ٢٠	٢٢	٢٠ فأكثر	٧٨
أقل من ٣٠	٣٧	٣٠ فأكثر	٦٣
أقل من ٤٠	٦٥	٤٠ فأكثر	٣٥
أقل من ٥٠	٨٨	٥٠ فأكثر	١٢
أقل من ٦٠	١٠٠	٦٠ فأكثر	٠

[١] ٦٥ طالب   [٢] ٣٥ طالب

[٣] عدد الطلبة الحاصلين على ٢٠ درجة فأكثر = ٧٨ طالب

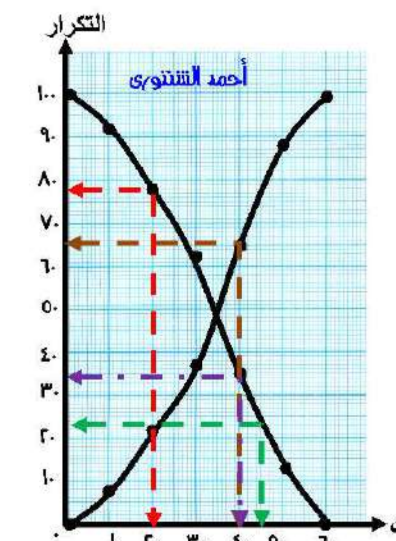
النسبة المئوية = $\frac{٧٨}{١٠٠}$ × ١٠٠ ٪

= ٧٨ ٪

[٤] عدد الطلبة الحاصلين على ٤٥ درجة فأكثر = ٢٣ طالب

النسبة المئوية = $\frac{٢٣}{١٠٠}$ × ١٠٠ ٪

= ٢٣ ٪



الدرس الثالث : الوسط الحسابى – الوسيط – المنوال

(١) [١] ١٠ [٢] ٥ [٣] ٧ [٤] ٤ [٥] ٧ [٦] ٦

(٢)

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٥ –	١٠	١٠	١٠٠
١٥ –	٢٠	٢٢	٤٤٠
٢٥ –	٣٠	٣٠	٩٠٠
٣٥ –	٤٠	٢٥	١٠٠٠
٤٥ –	٥٠	١٣	٦٥٠
المجموع		١٠٠	٣٠٩٠

الوسط الحسابى

$= \frac{٣٠٩٠}{١٠٠}$

= ٣٠,٩

(٣) [١] س = ٣٥ ، ٧ + ١٠ + ك + ١ + ١٣ + ٨ = ٥٠

و منها : ك = ١١

[٢]

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٥ –	١٠	٧	٧٠
١٥ –	٢٠	١٠	٢٠٠
٢٥ –	٣٠	١١	٣٣٠
٣٥ –	٤٠	١٣	٥٢٠
٤٥ –	٥٠	٨	٤٠٠
المجموع		٥٠	١٥٢٠

الوسط الحسابى = $\frac{١٥٢٠}{٥٠}$ = ٣٠,٤

(٤) [١] ٥ [٢] ٦

[٣]

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	ك × م
٦ –	٨	٢	١٦
١٠ –	١٢	٣	٣٦
١٤ –	١٦	٥	٨٠
١٨ –	٢٠	٨	١٦٠
٢٢ –	٢٤	٦	١٤٤
٢٦ –	٢٨	٤	١١٢
٣٠ –	٣٢	٢	٦٤
المجموع		٣٠	٦١٢

الوسط الحسابى = $\frac{٦١٢}{٣٠}$ = ٢٠,٤

(٥) [١] ٥ [٢] ٦ [٣] الثالث [٤] ٩

(٦)

جدول التكرار المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	٠
أقل من ٣٠	٣
أقل من ٣٥	١٣
أقل من ٤٠	٣٢
أقل من ٤٥	٥٥
أقل من ٥٠	٦٠

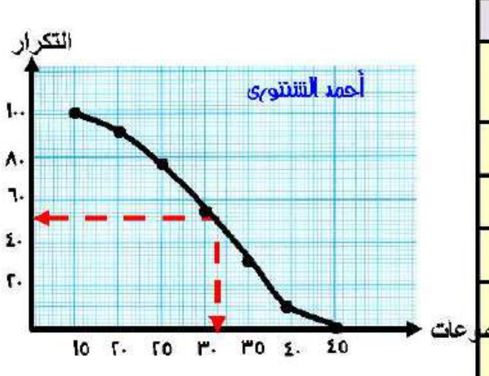
التكرار
أحمد الشتورى
٦٠ ٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠
المجموعات
٢٥ ٣٠ ٣٥ ٤٠ ٤٥ ٥٠

∵ ترتيب الوسيط = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠

∴ من الرسم : الوسيط = ٣٩

(٧)

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	٠



∵ ترتيب الوسيط = ٥٠

∴ من الرسم : الوسيط = ٣١

(٨) [١] س = ٣٠ ، ك = ١٥

[٢]

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
أقل من ١٠	٠	١٠ فأكثر	١٠٠
أقل من ٢٠	١٠	٢٠ فأكثر	٩٠
أقل من ٣٠	٢٧	٣٠ فأكثر	٧٣
أقل من ٤٠	٤٧	٤٠ فأكثر	٥٣
أقل من ٥٠	٧٩	٥٠ فأكثر	٢١
أقل من ٦٠	٩٦	٦٠ فأكثر	٤
أقل من ٧٠	١٠٠	٧٠ فأكثر	٠

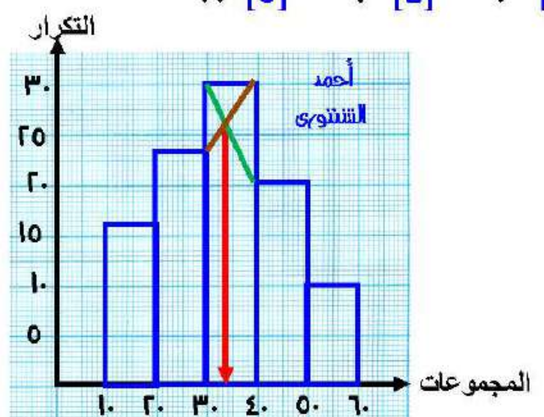
(جدول التكرار المتجمع الصاعد — جدول التكرار المتجمع النازل)

من الرسم : الوسيط = ٤١

(٩) [١] ٩ ٦٠ [٢] ٤ [٣] ٣ [٤] ٧ [٥] ٨

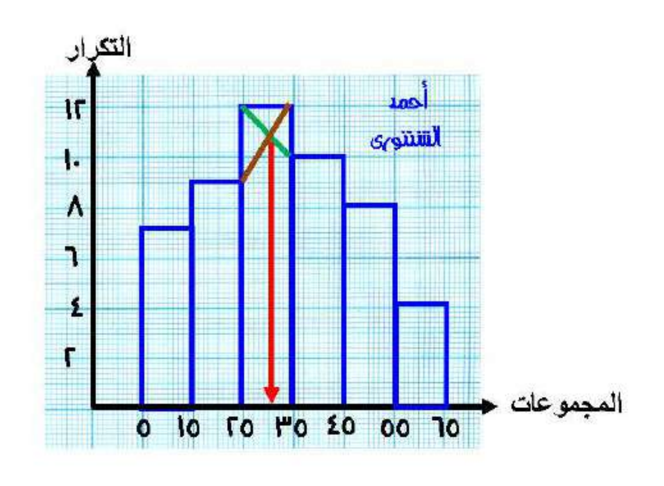
(١٠) من الرسم :

المنوال = ٣٤



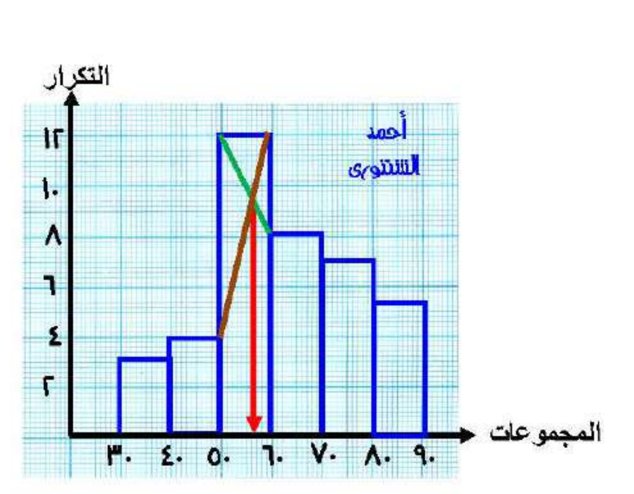
(١١) من الرسم :

المنوال = ٣١



(١٢) من الرسم :

المنوال = ٥٧



(١٣) [١] س = ٤٠ ،

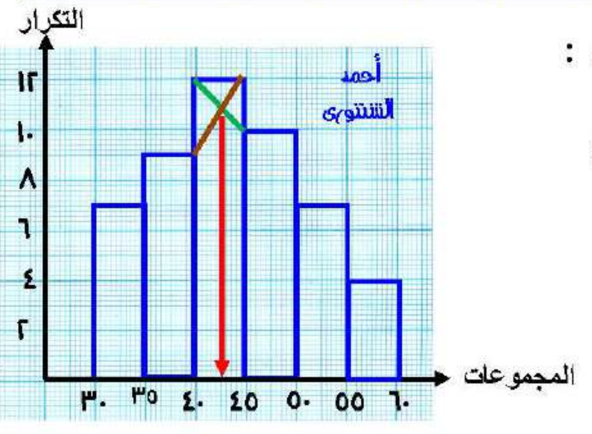
ك + ٤ + ٣ك + ٤ك + ٣ك + ١ + ٣ك − ١ + ك + ١ = ٥٠

ك = ٣

المجموعات	٣٠ −	٣٥ −	٤٠ −	٤٥ −	٥٠ −	٥٥ −	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	١٠	٨	٤	٥٠

[٢] من الرسم أكمل :

المنوال = ٤٣



(١٤) [١] ١٨ [٢] ١٠ [٣] ٧٢ [٤] ٤ [٥] ١٥ [٦] الثالث
[٧] ٧ [٨] ٣

(١٥) [١] المنوال [٢] الوسيط [٣] ١١ [٤] ٦

الوحدة الرابعة متوسطات المثلث و المثلث المتساوى الساقين

الدرس الأول : متوسطات المثلث

(١) [١] متوسط [٢] ٣ [٣] ١ : ٢ [٤] $\frac{٣}{٢}$ م ء
[٥] ٤ [٦] ٣ [٧] ٣

(٢) [أ] $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{حـ و}$ متوسطان فى Δ أ ب حـ

[٢] م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

[٣] م هـ = $\frac{١}{٣}$ ب هـ = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

[٤] م ء = $\frac{١}{٢}$ م حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ = ٢ سم

[٥] ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

[٦] محيط Δ م ء هـ = ٣ + ٢ + ٤ = ٩ سم

(٣) [أ] م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

[٢] م حـ = ٢ م ء = ٢ × ٣ = ٦ سم

[٣] حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

[٤] محيط Δ م حـ هـ = ٤ + ٦ + ٤ = ١٤ سم

(٤) ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ م منتصف $\overline{ب ء}$

∴ $\overline{أ م}$ متوسط فى Δ أ ب ء

، ∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{ء هـ}$ متوسط فى Δ أ ب ء

، ∵ $\overline{أ م}$ ∩ $\overline{ء هـ}$ = { و }

∴ و نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب ء

∴ ء و = $\frac{٢}{٣}$ ء هـ = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

، أ و = $\frac{٢}{٣}$ أ م = $\frac{٢}{٣}$ × ٩ = ٦ سم

، أ ء = ب حـ = ١٢ سم

(ضلعان متقابلان فى متوازى الأضلاع أ ب حـ ء)

∴ محيط Δ أ ء و = ٨ + ٦ + ١٢ = ٢٦ سم

(٥) ∵ أ ب حـ ء مستطيل ∴ م منتصف $\overline{أ حـ}$

∴ $\overline{ب م}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{حـ هـ}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ $\overline{ب م}$ ∩ $\overline{حـ هـ}$ = { و }

∴ و نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

∴ ب و = $\frac{٢}{٣}$ ب م = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ = ٦ سم

، ∵ أ حـ = ب ء

(قطرا المستطيل أ ب حـ ء ، ينصف كل منهما الآخر)

∴ أ م = ب م = ٦ سم

(٦) ∵ ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ $\overline{أ ء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ أ م = ٢ م ء ، م ∈ $\overline{أ ء}$

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

، ∵ أ م = ٢ م ء ، م ∈ $\overline{ب هـ}$

∴ $\overline{ب هـ}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ م ب = ٢ م هـ = ٨ سم ∴ ب هـ = ١٢ سم

، ∵ Δ ب حـ هـ فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء و}$ // $\overline{ب هـ}$

∴ و منتصف $\overline{هـ حـ}$ ∴ ء و = $\frac{١}{٢}$ ب هـ = ٦ سم ،

(٧) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ء = ء حـ

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

، ∵ $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب ء}$ متوسطان فى Δ أ ب حـ تقاطعا فى نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب ء = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

(٨) فى Δ أ هـ حـ : ∵ أ ل = ل هـ ، هـ م = م حـ

∴ أ حـ = ٢ ل م = ٢ × ٤ = ٨ سم

، ∵ فى Δ أ ب حـ : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ء = ء حـ

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

(٩) ∵ فى Δ أ ب حـ : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ء = ء حـ

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ (١)

، ∵ فى Δ أ هـ حـ : ∵ أ و = و هـ ، هـ م = م حـ

∴ و ء = $\frac{١}{٢}$ حـ هـ (٢)

، ∵ أ حـ = حـ هـ (٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : ب ء = ء و

(١٠) فى Δ أ ب حـ : ∵ ء ل = ل أ ، ء م = م حـ

∴ ل م = $\frac{١}{٢}$ أ حـ ، ∵ ل م = ب هـ

∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∴ من Δ أ ء حـ يكون : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

(١١) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، أ هـ = هـ حـ ∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

، ∵ ب هـ = هـ ء ∴ هـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∴ من Δ أ ء حـ يكون : ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

(١٢) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، أ هـ = هـ حـ ∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

، ∵ ب هـ = هـ ء ∴ هـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∴ من Δ أ ء حـ يكون : ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

(١٣) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق(∠ حـ) = ٣٠° ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

، ∵ أ ء = ء حـ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

، أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

∴ محيط Δ أ ب ء = ٣ × ٨ = ٢٤ سم

(١٤) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق(∠ حـ) = ٣٠° ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

، ∵ أ ء = ء حـ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

، ∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسطان فى Δ أ ب حـ تقاطعا فى نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

∴ ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب ء = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

، أ م = ٢ ب ء = ٢ × ٢,٥ = ٥ سم

∴ Δ أ ب م = ٦ + ٤ + ٥ = ١٥ سم

(١٥) فى Δ أ ب جـ : ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°
، ق (∠ جـ) = ٣٠° ∴ أ جـ = ٢ أ ب = ٢ × ٦ = ١٢ سم
، فى Δ أ ب جـ : ∵ أ هـ = هـ جـ ، ء هـ = ٦ سم = $\frac{١}{٢}$ أ جـ
∴ ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°

(١٦) فى Δ أ ب جـ : ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°
، ق (∠ جـ) = ٣٠° ∴ أ جـ = ٢ أ ب = ٢ × ٨ = ١٦ سم
، ∵ أ ء = ء جـ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم
، فى Δ جـ ء هـ فيه : ق (∠ ء هـ جـ) = ٩٠°
، ق (∠ جـ) = ٣٠° ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ء جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

(١٧) فى Δ ب ء هـ فيه : ∵ ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠°
، ق (∠ هـ) = ٣٠° ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم
، فى Δ أ ب جـ فيه : ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ء = ء جـ
∴ أ جـ = ٢ ب ء = ٢ × ٥ = ١٠ سم

(١٨) ∵ أ ب جـ ء مربع ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ب أ ء) = ٩٠°
∴ فى Δ أ ب هـ : ∵ ق (∠ أ هـ ب) = ٦٠°
∴ ق (∠ ب أ هـ) = ٣٠° ، ق (∠ ء أ و) = ٦٠°
، ∵ فى Δ أ ء و : ق (∠ أ و ء) = ٩٠°
∴ ق (∠ أ ء و) = ٣٠° ، أ ء = ٢ أ و = ٢ × ٤ = ٨ سم

∴ مساحة المربع أ ب جـ ء = ٨ × ٨ = ٦٤ سم²

(١٩) فى Δ ء جـ هـ : ∵ ق (∠ ب هـ جـ) = ٩٠°
، ق (∠ هـ جـ ء) = ٣٠° ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ء جـ (١)
، أ ب جـ ء مستطيل فيه ، ق (∠ هـ جـ ء) = ٣٠°
∴ ق (∠ ب جـ هـ) = ٦٠°
∴ فى Δ ء جـ هـ : ∵ ق (∠ ب هـ جـ) = ٩٠°
∴ ق (∠ جـ ب هـ) = ٣٠° ∴ جـ هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (٢)
من (١) ، (٢) ينتج : جـ هـ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٤}$ ب جـ

(٢٠) [١] نصف [٢] نصف [٣] قائمة [٤] ١٠ [٥] ٥ [٦] ٦

الدرس الثانى : المثلث المتساوى الساقين

(١)

رقم الشكل	[١]	[٢]	[٣]
اسم المثلث	ك ل م	ء هـ و	أ ب جـ
القاعدة	ل م	ء و	ب جـ
الساقان	ك ل ، ك م	هـ ء ، هـ و	أ ب ، أ جـ
زاويتى القاعدة	∠ م ، ∠ ل	∠ ء ، ∠ و	∠ ب ، ∠ جـ
زاوية الرأس و نوعها	∠ ك منفرجة	∠ هـ قائمة	∠ أ حادة

الدرس الثالث : نظريات المثلث المتساوي الساقين

(١) [١] س = ٥٥° ، ص = ٧٠°   [٢] س = ٨٤° ، ص = ١٣٢°

[٣] س = ٦٥° ، ص = ٥٠°

[٤] س = ١١٦° ، ص = ٥٢° ، ع = ٦٤°

[٥] س = ٢٥° لأن : ٢س + س + ٤٠ + ٣س − ١٠ = ١٨٠°

[٦] س = ٢١° لأن : ٢س + ١٢ + ٢س + ١٢ + ٣س + ٩ = ١٨٠°

[٧] س = ٣٠° لأن : ٣س − ١٧ = ٢س + ١٣

[٨] س = ٦٦° ، ص = ٥٧°

(٢) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ب جـ = جـ أ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ب أ جـ) = ٦٠°

، ∵ Δ أ جـ ء فيه : أ جـ = أ ء ، ق(∠ ء) = ٧٠°

∴ ق(∠ أ جـ ء) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

، ق(∠ جـ أ ء) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠ ب جـ ء) = ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ أ جـ ء)

= ٦٠° + ٧٠° = ١٣٠°

، ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب أ جـ) + ق(∠ جـ أ ء)

= ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠°

(٣) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ب جـ = جـ أ

∴ ق(∠ ب) = ٦٠°   (١)

، ∵ Δ ء ب جـ فيه : ء ب = ء جـ

∴ ق(∠ ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ × (١٨٠° − ١٠٠°) = ٤٠°   (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح ينتج : ق(∠ أ ب ء) = ٢٠°

(٤) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ   ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ)

∴ ΔΔ أ ب ء ، أ جـ هـ فيهما :

أ ب = أ جـ ، ء ب = هـ جـ ، ق(∠ ب) = ق(∠ جـ)

∴ ينطبق المثلثان و ينتج : أ ء = أ هـ

∴ Δ أ ء هـ متساوي الساقين

∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ هـ ء)

(٥) ∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع   ∴ أ ب = ء جـ

، ∵ أ ب = ء هـ   ∴ ء جـ = ء هـ

∴ من Δ ء جـ هـ :

ق(∠ ء هـ جـ) = ق(∠ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × (١٨٠° − ٥٠°) = ٦٥°

، ∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) = ٦٥°

(٦) [١] ب أ = ب جـ   [٢] ء و = و هـ

[٣] ع ص = ع س   لأن : ∠ ل ع س خارجة عن Δ س ص ع

∴ ق(∠ س) = ١٤٠° − ٧٠° = ٧٠°

[٤] أ ب = أ جـ   لأن : ٣ل + ل + ٥٠° + ٣٠° = ١٨٠°

و منها : ل = ٧٥°   ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٧٢°

(٧) ∵ ٣ ق(∠ جـ) = ٧٢°   ∴ ق(∠ جـ) = $\frac{٧٢}{٢}$ = ٣٦°

∵ ق(∠ أ) = ٧٢°

∴ ق(∠ جـ) = ١٨٠° − (٧٢° + ٣٦°) = ٧٢°

∵ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ) ∴ ب جـ = ب أ
∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

(٨) ∵ Δ ء ب جـ فيه : ب ء = ء جـ ، ق(∠ ب ء جـ) = ١٢٠°
∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ × (١٨٠° − ١٢٠°)
= ٣٠°
، ∵ ب ء ينصف ∠ ب ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٢ ق(∠ ء ب جـ)
= ٦٠°
، ∵ جـ ء ينصف ∠ جـ ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٢ ق(∠ ء جـ ب)
= ٦٠°
∴ فى Δ أ ب جـ يكون :
ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)
∴ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

(٩) ∵ ب جـ // ء هـ ∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ ب جـ) بالتناظر
، ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ أ جـ ب) بالتناظر
، ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)
∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ هـ ء) ∴ أ ء = أ هـ
∴ Δ أ ء هـ متساوى الساقين
، ∵ أ ب = أ جـ ، أ ء = أ هـ
∴ بالطرح ينتج : ب ء = جـ هـ

(١٠) ∵ ب جـ // ء هـ ∴ ق(∠ هـ ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل
، ∵ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ ء ب جـ)
∴ ق(∠ هـ ء ب) = ق(∠ هـ ب ء) ∴ هـ ب = هـ ء
∴ Δ ب ء هـ متساوى الساقين

(١١) [١] ب جـ [٢] ٥٠ [٣] ٤٥ [٤] ٨٤ [٥] ٥٣
[٦] ٥ [٧] ٦٠ [٨] ١٢٠ [٩] قائم الزاوية

(١٢) [١] منفرج الزوية [٢] ٦٠ [٣] ٤٥
[٤] ١٢٠ [٥] منفرجة [٦] متساوى الساقين

الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

(١) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ
∴ ق(∠ جـ أ ء) = ق(∠ ب أ ء) = ٣٢°
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ٢ ق(∠ ب أ ء) = ٢ × ٣٢° = ٦٤°
، ب ء = ء جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

(٢) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ب جـ ، ب ء ⊥ أ جـ
∴ ء جـ = أ ء = ٤ سم ∴ أ جـ = ٢ أ ء = ٢ × ٤ = ٨ سم
، ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء ب أ)
∴ ق(∠ ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × ٩٠° = ٤٥°
∴ من Δ ء ب جـ : ق(∠ جـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°
∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب)
∴ ء ب = ء جـ
∴ Δ ب ء جـ متساوى الساقين

(٣) نصل أ حـ ، أ ء

∆∆ أ ب حـ ، أ هـ ء فيهما :

أ ب = أ هـ ، ب حـ = هـ ء ،

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ هـ ء)

∴ ينطبق المثلثان و ينتج أن : أ حـ = أ ء

، ∵ ∆ أ حـ ء فيه : أ حـ = أ ء

، حـ و = و ء ∴ أ و ⊥ حـ ء

(٤) ∵ أ ب = أ حـ ∴ أ ∈ محور ب حـ

، ∵ هـ ب = هـ حـ ∴ هـ ∈ محور ب حـ

∴ أ هـ محور ب حـ

∴ ب ء = حـ ء ، أ ء ⊥ ب حـ

، ∵ ب حـ = ١٠ سم ∴ حـ ء = ٥ سم

∴ من ∆ أ ء حـ القائم الزاوية فى ء يكون :

(أ ء)^2 = (أ حـ)^2 − (ء حـ)^2 = (١٣)^2 − (٥)^2

= ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤ ∴ أ ء = √١٤٤ = ١٢ سم

(٥) ∵ أ ب = أ ء ، ب حـ = ء حـ ∴ أ حـ محور ب ء

، ∵ ب ء ∩ أ حـ = { م } ∴ م منتصف ب ء

(٦) ∵ ∆ س ص ل فيه : س ص = س ل ، ل م = ص م

∴ س م محور ص ل

، ∵ ∆ ع ص ل فيه : ع ص = ع ل ، ل م = ص م

∴ ع م محور ص ل

∴ س ، م ، ع على استقامة واحدة

(٧) ∵ أ ب = أ حـ ∴ أ ∈ محور ب حـ (١)

، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

، ∵ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ ء)

∴ بالطرح ينتج : ق (∠ هـ ب حـ) = ق (∠ هـ حـ ء)

∴ هـ ب = هـ حـ ∴ هـ ∈ محور ب حـ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج : أ هـ محور ب حـ

(٨) ∵ فى ∆ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، ∵ ء هـ // أ ب ∴ ق (∠ ب) = ق (∠ ء هـ و) بالتناظر

، ∵ ء و // أ حـ ∴ ق (∠ حـ) = ق (∠ ء و هـ) بالتناظر

∴ ق (∠ ء هـ و) = ق (∠ ء و هـ) ∴ ء هـ = ء و

، ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ هـ ء و)

(٩) [١] محور تماثل له [٢] محور تماثل لها [٣] متساويين

[٤] ٣ [٥] ١ [٦] ٣٠

[٧] القاعدة و زاوية رأس المثلث [٨] القاعدة و يكون عمودياً عليها

(١٠) [١] ٣ [٢] ص ل [٣] أ س = ب س

[٤] محور تماثل [٥] صفر [٦] ١ [٧] محور تماثل

الوحدة الخامسة — التباين

الدرس الأول : التباين

(١) [١] > [٢] < [٣] <

(٢) [١] ١) ٨٥° ٢) ١١٠° [٢] ١) < ٢) > ٣) < ٤) >

(٣) [١] > [٢] < [٣] < [٤] > [٥] >

(٤) ∵ أ ب < حـ ء

∴ أ ب + ب حـ < حـ ء + ب حـ ∴ أ حـ < ب ء

(٥) ∵ أ ب < أ حـ ، ب ء = حـ هـ

∴ أ ب − ب ء < أ حـ − حـ هـ ∴ أ ء < أ هـ

(٦) ∵ ء ب = ء حـ ∴ ق(∠ ء حـ ب) = ق(∠ ء ب حـ)

، ∵ ق(∠ أ حـ ب) < ق(∠ أ ب حـ)

∴ ق(∠ أ حـ ب) − ق(∠ ء حـ ب) < ق(∠ أ ب حـ) − ق(∠ ء ب حـ)

∴ ق(∠ أ حـ ء) < ق(∠ أ ب ء)

(٧) ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ق(∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

، ق(∠ ب أ حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠ أ ب حـ) < ق(∠ أ ب حـ) < ق(∠ ب أ حـ)

(٨) ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ أ ب = حـ ء ، أ ء = ب حـ

، ∵ ء و < ب هـ ∴ أ ء − ء و > ب حـ − ب هـ

∴ أ و < حـ هـ ∴ أ و + أ ب < حـ هـ + حـ ء

(٩) [١] < [٢] < [٣] > [٤] > [٥] >

الدرس الثانى : المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

(١) فى Δ أ ب حـ :

∵ أ ب < ب حـ ∴ ق(∠ حـ) < ق(∠ أ) (١)

، ∵ ب حـ < حـ أ ∴ ق(∠ أ) < ق(∠ ب) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : ق(∠ حـ) < ق(∠ أ) < ق(∠ ب)

(٢) ∵ Δ أ ب حـ فيه : أ ب < أ حـ

∴ ق(∠ حـ) < ق(∠ ب) (١)

، ∵ أ ء = ء ب ، أ هـ = هـ حـ ∴ ء هـ // ب حـ

∴ ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ حـ) بالتناظر (٢)

، ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ ب) بالتناظر (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : ق(∠ أ هـ ء) < ق(∠ أ ء هـ)

(٣) نصل أ حـ

∵ Δ أ ب حـ فيه : ب حـ = أ ب

∴ ق(∠ ب أ حـ) < ق(∠ أ حـ ب)

، ∵ Δ أ ء حـ فيه : ء حـ = أ ء

∴ ق(∠ ء أ حـ) < ق(∠ أ حـ ء)

∴ ق(∠ ب أ حـ) + ق(∠ ء أ حـ) <

ق(∠ أ حـ ب) + ق(∠ أ حـ ء)

∴ ق(∠ ب أ ء) < ق(∠ ب حـ ء)

(٤) نصل $\overline{ب ء}$

∵ Δ ا ب ء فيه : ا ب = ا ء

∴ ق (∠ ا ب ء) = ق (∠ ا ء ب)

∵ Δ ب حـ ء فيه : ء حـ > ب حـ

∴ ق (∠ حـ ب ء) > ق (∠ ب حـ ء)

∴ ق (∠ حـ ب ء) + ق (∠ ا ب ء) >

ق (∠ ب حـ ء) + ق (∠ ا ء ب)

∴ ق (∠ ا ب حـ) > ق (∠ ا ء حـ)

(٥) ∵ Δ ء ب حـ فيه : ء حـ > ء ب

∴ ق (∠ ء ب حـ) > ق (∠ ء حـ ب)

، ∵ ق (∠ ا ب حـ) = ٢ ق (∠ ء ب حـ)

ق (∠ ا حـ ب) = ٢ ق (∠ ء حـ ب)

∴ ق (∠ ا ب حـ) > ق (∠ ا ء حـ)

(٦) ∵ $\overline{ا ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ متوسطان فى Δ ا ب حـ تقاطعا فى نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ ا ب حـ

∴ ا م = ٢ م ء ، ب م = ٢ م هـ

، ∵ م ء > م هـ ∴ ٢ م ء > ٢ م هـ

∴ ا م > ب م ∴ ب م < ا م

∴ من Δ ا ب م يكون : ق (∠ م ا ب) < ق (∠ م ب ا)

(٧) ∵ Δ هـ ب حـ فيه : هـ حـ > هـ ب

∴ ق (∠ هـ ب حـ) > ق (∠ هـ حـ ب)

، ∵ ا ب حـ ء مستطيل

∴ ق (∠ ا ب حـ) = ق (∠ ء حـ ب) = ٩٠°

∴ ٩٠° − ق (∠ هـ ب حـ) > ٩٠° − ق (∠ هـ حـ ب)

∴ ق (∠ ا ب هـ) < ق (∠ ء حـ هـ)

(٨) ∵ Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق (∠ ا ب حـ) = ق (∠ ا حـ ب) = ٦٠°

، ∵ ق (∠ ء حـ ب) > ق (∠ ء ب حـ)

∴ ق (∠ ا ب حـ) − ق (∠ ء حـ ب) <

ق (∠ ا حـ ب) − ق (∠ ء ب حـ)

∴ ق (∠ ا ب ء) > ق (∠ ا حـ ء)

، ∵ ق (∠ ب ا حـ) = ق (∠ ا ب حـ)

∴ ق (∠ ب ا حـ) = ق (∠ ا ب ء) + ق (∠ ء ب حـ)

∴ ق (∠ ب ا حـ) > ق (∠ ا ب ء)

، ∵ ق (∠ ا ب ء) > ق (∠ ا حـ ء)

∴ ق (∠ ا) > ق (∠ ا ب ء) > ق (∠ ا حـ ء)

(٩) [١] أصغر [٢] أكبر [٣] ٦٠ [٤] <

[٥] ق (∠ حـ) > ق (∠ ب) > ق (∠ ا)

(١٠) [١] > [٢] ق (∠ ب) > ق (∠ ا) [٣] >

الدرس الثالث : المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

(١) [١] < [٢] > [٣] > [٤] <

(٢) ∵ أهـ // ب جـ ∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ هـ أ جـ) = ٣٠° بالتبادل

، ق(∠ ب) = ق(∠ ء أ هـ) = ٧٠° بالتناظر

∴ Δ أ ب جـ فيه : ق(∠ ب) < ق(∠ جـ) ∴ أ جـ < أ ب

(٣) ∵ أ ء // ب جـ

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ء أ جـ) = ٣٠° بالتبادل

∴ Δ أ ب جـ فيه : ق(∠ ب أ جـ) < ق(∠ أ جـ ب)

∴ ب جـ < أ ب

(٤) نصل ب ء

∵ Δ أ ب ح ء فيه : أ ب = أ ء

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ب ء)

∵، ق(∠ أ ء جـ) < ق(∠ أ ب جـ)

∴ ق(∠ أ ء جـ) − ق(∠ أ ء ب)

< ق(∠ أ ب جـ) − ق(∠ أ ب ء)

∴ ق(∠ ب ء جـ) < ق(∠ ء ب جـ) ∴ ب جـ < جـ ء

(٥) ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ ب جـ) = ½ (١٨٠° − ١٠٠°)

= ٤٠° ، ∵ جـ أ ينصف ∠ ب جـ ء

∴ ق(∠ أ جـ ء) = ٤٠° ، ∵ ∠ ء أ جـ خارجة عن Δ أ ب جـ

∴ ق(∠ ء أ جـ) = ٨٠°

∴ من Δ أ ء جـ : ق(∠ أ ء جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠ ء أ جـ) < ق(∠ أ ء جـ) ∴ ء جـ < أ جـ

، ∵ أ جـ = أ ب ∴ ء جـ < أ ب

(٦) ∵ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ق(∠ أ جـ ب) = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) ∴ أ جـ > أ ب

(٧) ∵ Δ أ جـ هـ فيه : ق(∠ ب) = ٩٠° ∴ أ هـ > جـ هـ (١)

،∵ Δ ب ء هـ فيه : ق(∠ ء) = ٩٠° ∴ ب هـ > ء هـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : أ هـ + هـ ب > جـ هـ + ء هـ

∴ أ ب > جـ ء

(٨) ∵ ق(∠ أ) + ق(∠ ب) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

∴ ٥ س + ٢ + ٦ س − ١٠ + س + ٢٠ = ١٨٠°

∴ ١٢ س + ١٢ = ١٨٠° و منها : س = ١٤°

∴ ق(∠ أ) = ٧٢° ، ق(∠ ب) = ٧٤°

، ق(∠ جـ) = ٣٤°

∴ ق(∠ جـ) > ق(∠ أ) > ق(∠ ب)

∴ أ ب > ب جـ > أ جـ

(٩) [١] أصغر [٢] الوتر [٣] ب جـ [٤] ب جـ [٥] أ ب

(١٠) [١] أ جـ > أ ب [٢] أ جـ > ب جـ [٣] أ ب

[٤] أ ب > ب جـ [٥] > [٦] <

الدرس الرابع : متباينة المثلث

(١) [١] ٣ ، ٦ ، ٩ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٣ + ٦ = ٩

[٢] ٦ ، ١٠ ، ٧ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٦ + ٧ = ١٣ > ١٠

[٣] ٥ ، ٥ ، ٥ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٥ + ٥ = ١٠ > ٥

[٤] ٤ ، ٤ ، ٦ لتصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٤ + ٤ = ٨ > ٦

[٥] ٤ ، ٦ ، ١١ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٤ + ٦ = ١٠ < ١١

(٢) نفرض أن : طول الضلع الثالث = ل سم

∴ ٨ − ٥ < ل < ٨ + ٥ ∴ ٣ < ل < ١٣

∴ ل ∈] ٣ ، ١٣ [

(٣) [١] < [٢] > [٣] ٦ [٤] ١٢ [٥] ٨ [٦]] ٣ ، ١١ [

[٧]] ٣ ، ١٢ [[٨]] ٣ √٢ ، ٧ √٢ [

(٤) [١] أصغر من [٢] ٤ [٣] ٥ [٤] ٩

[٥] {٣ ، ٣ ، ٥} [٦]] ٥ ، ١٥ [[٧] ٢

(٥) من Δ أ حـ ء : أ حـ + أ ء > حـ ء ، ∵ أ ب = أ حـ

∴ أ ب + أ ء > حـ ء ∴ ب ء > حـ ء

(٦) من Δ أ ب م : أ م + ب م > أ ب (١)

من Δ أ حـ م : أ م + حـ م > أ حـ (٢)

من Δ ب حـ م : ب م + حـ م > ب حـ (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ينتج :

٢ أ م + ٢ ب م + ٢ حـ م > أ ب + أ حـ + ب حـ

∴ أ م + ب م + حـ م > ½ محيط Δ أ ب حـ

(٧) بفرض أن : أ ب حـ مثلث ∴ أ ب < أ حـ + ب حـ

بإضافة أ ب للطرفين ∴ ٢ أ ب < أ حـ + ب حـ + أ ب

∴ ٢ أ ب < محيط Δ أ ب حـ ∴ أ ب < ½ محيط Δ أ ب حـ

(٨) ليكن أ ب حـ ء شكلاً رباعياً ، م نقطة تقاطع قطريه

من Δ أ ب م : أ ب < أ م + م ب (١)

من Δ أ ء م : أ ء < أ م + م ء (٢)

من Δ ب حـ م : ب حـ < ب م + م حـ (٣)

من Δ حـ ء م : حـ ء < حـ م + م ء (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج :

أ ب + ب حـ + حـ ء + ء أ < ٢ (م أ + م حـ) + ٢ (م ب + م ء)

∴ أ ب + ب حـ + حـ ء + ء أ < ٢ (أ حـ + ب ء)

(٩) ليكن أ ب حـ ء شكلاً رباعياً محدباً

من Δ أ ب حـ : أ ب + ب حـ > أ حـ (١)

من Δ ب حـ ء : ب حـ + حـ ء > ب ء (٢)

من Δ أ ب ء : أ ب + أ ء > ب ء (٣)

من Δ أ ء حـ : أ ء + ء حـ > أ حـ (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج :

٢ (أ ب + ب حـ + حـ ء + أ ء) > ٢ (أ حـ + ب ء)

∴ أ ب + ب حـ + حـ ء + أ ء > أ حـ + ب ء